LA SCIENZA
DEL CALCOLO

OPERA

DEL SIG. AB. PIETRO FRANCHINI

P. PROF. DI MATEMATICHE SUPERIORI
SOCIO DELLA R. ACCADEMIA DI SCIENZE, BELLE LETTERE ED ARTI DI LUCCA
MEMBRO ORDINARIO DELL' ACCADEMIA ITALIANA
CORRISPONDENTE DELLA R. ACCADEMIA
DI TORINO &c.

Tomo III.

LIVORNO
NELLA STAMPERIA DELLA FENICE.
1818.

CAPITOLO III.

GEOMETRIA TRASCENDENTE

ARTICOLO I.

CURVE DI I.° ORDINE

C' est à la considération des courbes qu'on doit les principales méthodes de l'analyse.
Lagrange Calc. des Fonct. Leçon 21 p. 23.

Nozioni Preliminari.

§. 367. *Linea curva è un sistema di rette infinitesime comunque fra loro inclinate, e può concepirsi generata da un punto che percorre una serie di successivi spazj, ciascuno in una particolar direzione, e minore d' ogni quantità assegnabile.* (*)

(*) Prescindendo da questo concetto si cadrebbe nell' assurdo Leibniziano di comporre l' estensione di *monadi* inestese, cioè la lunghezza di punti non lunghi. *Monge* (*Feuilles d' Anal.* n.° 4.°) è partito da un' idea conforme a quella da noi annunziata, e *Lagrange* (*Calc. des Fonct. Leçon* 21) dice che lo spirito del Calc. Diff.le suppone le curve formate di rette infinitesime.
Le seg. definizioni 1.° *è curva una linea i cui successivi punti sono diversamente situati fra loro*: 2.° *una linea che non è retta nè composta*

La curva è regolare se la distribuzione de' suoi punti o la sua generazione, va sottoposta ad una legge costante: se ne acquista una superficiale idea descrivendola con un sicuro e facile meccanismo, ma una completa nozione è riposta nell' eq. fra le coordinate de' suoi punti, e questa si ottiene in due maniere: 1.° rapportandoli a due oggetti fissi, semplici e dati di posizione, quali sono i punti, le rette, gli angoli ed i piani, ed esprimendo, per mezzo di qualche proprietà d' altronde nota, l' anzidetto rapporto: 2.° ricavandola dal simbolo generale dell'eq.ⁱ fra due indeterminate.

Una curva è *algebrica* o *trascendente*; può essere *esponenziale* o *interscendente*: Spettano alla 1.ª classe quelle la cui eq. dipende dalle sole sei operazioni fondamentali dell' algoritmo algebrico; alla 2.ª se trovasi affetta da funzioni logaritmiche o trigonometriche: un esponente variabile caratterizza le altre due classi; la 3.ª se razionale, se irrazionale la 4.ª

Le linee si distinguono in ordini. Al 1.° appartiene la retta; il 2.° comprende le curve di 1.° *genere*, la cui eq. generale è

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \dots (a)$$

Le curve di 2.° genere costituiscono le linee di 3.° ordine e sono espresse con l' eq.

$$Ay^3+Bxy^2+Cx^2y+Dx^3+Ex^2+Fy^2+Gxy+Hy+Ix+L=0$$

di rette: 3.° è curva la traccia segnata da un punto che si muove con qualunque legge, non sono ammissibili: la 2.ª ha pur anche il difetto di essere negativa; la 3. è inadequata e può riferirsi ad un poligono composto di un finito n.° di lati.

Bisogna però che l'eq. non sia risolubile in fattori razionali, perchè in tal caso essa rappresenta un sistema di più linee. Tal è
$y^2 - ay - xy + ax = 0$ che equivale ad $(y-x)(y-a)=0$

Dividendo per un coefficiente tutti i termini si scuopre che i coefficienti necessarj per le linee degli ordini, 1.°, 2.°, 3.°, 4.° ec. sono respettivamente 2, 5, 9, 14 ec. Sembra dunque che $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ punti dati debbano bastare per costituire la forma e la posizione di una linea dell' ordine n.^{esimo}, perchè sostituendo successivamente nell'eq. le due coordinate di ciascun punto, si ottiene un n.° di eq.^{i} eguale a quello de' coefficienti. Ciò infatti succede per rapporto alle linee di 1.° ordine (§. 332) ed anche, come presto vedremo, di quelle di 2.°, ma un tal canone non si estende agli ordini superiori, e la ragione si è che non tutte l'eq.^{i} sopra indicate riescono diverse o conciliabili. Schiariremo questa verità nell' Art. sulla intersezione delle curve.

§. 368. *Centro* di una curva è un punto C del suo piano, dove ogni corda MM' (F.^{a} 94) rimane bipartita. Condotta una 2.^{a} corda ACB si tirino ad essa le perpendicolari MP, M'P', ed in forza de' trigoni eguali si avrà, prescindendo dal segno,

$$CP(=x)=CP'(=-x);\ MP(=y)=M'P'(=-y).$$

Dunque l'eq. di una curva dotata di centro non si altera sostituendovi $-x, -y$ per x, y, e viceversa. In tale ipot. l'origine è nel centro. Affinchè l'eq. (a) spetti ad una curva come

sopra, bisogna dunque che manchino i termini Dy, Ex, o che questi, con una convenevole traslocazione degli assi possano eliminarsi.

Una trasversale che bipartisca un indefinito sistema di corde parallele dicesi *diametro*. Esso ha in conseguenza la proprietà di bipartire la superficie compresa nel perimetro della curva. Due diametri diconsi *coniugati* quando uno bipartisce le corde parallele all'altro.

Per avere l'eq. di un diametro si ponga in (a)

$$y=m\lambda\delta+y_{,}\,,\quad x=\lambda\delta+x_{,};$$

sistema equivalente ad una trasversale $y-y_{,}=m(x-x_{,})$ (335): nella trasformata

$$\lambda^2[\mathrm{A}m^2+\mathrm{B}m+\mathrm{C}]\delta^2+$$

$$\lambda[(2\mathrm{A}m+\mathrm{B})y_{,}+(\mathrm{B}m+2\mathrm{C})x_{,}+\mathrm{D}m+\mathrm{E}]\delta+$$

$$\mathrm{A}y_{,}^2+\mathrm{B}xy_{,}+\mathrm{C}x_{,}^2+\mathrm{D}y_{,}+\mathrm{E}x_{,}+\mathrm{F}=0\ldots(a')$$

si faccia $=0$ il coefficiente di δ, e siccome, in forza di tale ipot. i valori di δ risultano eguali e di segno contrario, è

$$(2\mathrm{A}m+\mathrm{B})y_{,}+(\mathrm{B}m+2\mathrm{C})x_{,}+\mathrm{D}m+\mathrm{E}=0\ \ldots(a'')$$

il luogo geometrico di tutti i punti che bipartiscono la trasversale e le sue parallele, cioè l'eq. di un diametro. La conclusione prec. suppone reali i valori di δ, qualunque sia il segno ed il valore di B, C, m; e ciò può sempre ottenersi collocando gli assi coordinati in

guisa che l' ultimo termine $Ay_{,}^{2}$—ec.+F dell' eq. (a') risulti negativo se positivo è il coeff.te δ^{4}.

§. 369. Le proprietà di una curva sono indipendenti dagli oggetti a cui vien riferita: variandoli si modifica la forma non il significato dell' eq. che la rappresenta, e la modificazione diviene interessante se giova a qualche uso particolare, o conduce ad un' espressione della massima semplicità. Gli artifizi di tal natura, mentre presentano la curva sotto diverso aspetto, notabilmente ne agevolano la discussione e le applicazioni.

Sieno At, Au (F.a 84) i nuovi assi, AN$(=t)$, MN$(=u)$ le nuove coordinate: conducasi NQ perpendicolare, Nn parallela ad Ax, e siccome

$$AQ = t\cos.\hat{t.x},\quad Nn(=QP) = u\cos.\hat{u.x},$$

$$NQ(=nP) = t.sen.\hat{t.x}.\quad Mn = u.sen.\hat{u.x},$$

si avrà, per sostituire alle coordinate rettangole x,y le obbliquangole t,u, il sistema

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + t\cos.\hat{t.x} + u\cos.\hat{u.x} \\ y = \beta + t\,sen.\hat{t.x} + u\,sen.\hat{u.x} \end{array}\right\}\ldots \text{I}$$

dove α, β sono le coordinate della nuova origine qualora ella subisca traslocamento. L' espressione di t, u, che dal prec. sistema si deduce, serve alla trasformazione contraria.

Cangiando il solo asse Ax in At, e l' origine, si ha $\hat{u.x} = \frac{1}{2}\pi$ ed il sistema superiore diviene

$\{ x = \alpha + t.\cos.\hat{t.x}\,,\ y = \beta + u + t\,\mathrm{sen}.\hat{t.x} \} \ldots$ II

dovè fassi $\alpha = 0$ se l'origine si trasferisce lungo l'asse Ay, si fa $\beta = 0$ se si trasferisce lungo Ax (*).

I sistemi I, III, sin qui adottati per trasformare l'eq. di qualsivoglia curva algebrica, suppongono la curva già riferita a due assi rettangoli. Il metodo che passiamo ad esporre, incidentemente giustifica l'ipot. di cui si tratta, e conduce con la massima semplicità ad una trasformata del tutto opportuna.

Risolvendo (a) per y si ritrae

$$y = gx + h \pm \sqrt{(kx^2 + ix + l)}$$

dove $g = -\frac{1}{2}\frac{B}{A}$, $h = -\frac{1}{2}\frac{D}{A}$, $k = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$,

$$i = \frac{2(BD - 2AE)}{4A^2},\ l = \frac{D^2 - 4AF}{4A^2},$$

e per costruire i punti M, M' della curva (F.ª 85) altro non si richiede che aggiungere $\pm \sqrt{(kx^2 + ix + l)}$ alle ordinate rettangole della retta DG (asse delle t) espressa dall'eq. $y = gx + h$.

(*) Il sistema II è il più semplice ed il più vantaggioso. Sostituendo alle x, y un nuovo sistema di coordinate rettangole t, u, risulta

$\hat{u.x} = \frac{1}{2}\pi + \hat{t.x}$, $\cos.\hat{u.x} = -\mathrm{sen}.\hat{t.x}$, $\mathrm{sen}.\hat{u.x} = \cos.\hat{t.x}$,

ed il sistema I si cangia in

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha + t.\cos.\hat{t.x} - u.\mathrm{sen}.\hat{t.x} \\ y = \beta + t.\mathrm{sen}.\hat{t.x} + u.\cos.\hat{t.x} \end{array}\right\} \ldots \text{III}$$

Si ha $\widehat{ty} = \frac{1}{2}\pi$ quando B=o, ed in tal caso DG è pallela ad Ax, e distante da quest' asse della quantità h: bisogna che sia D=o perchè la DG confondasi con Ax.

Qualunque sia il valore di B, D, l' eq. (a) si riduce alla forma $y^2 = kx^2 + ix + l$ collocando l' origine A in B e portando Ax in Bx sicchè abbiasi AB $(=\beta) = h$, e $tan.\ \widehat{t.x} = g$. Ciò si ottiene con trasformare la proposta per mezzo del sistema II modificato con l' ipot. $\alpha = o$, giacchè il traslocamento dell' origine lungo l' asse Ay non porta variazione in x. La risultante, siccome MP $(= y)$ equivale

ad $MQ(=u) + Qm(=t\ sen.\ \widehat{t.x}) + mP\ (=\beta)$, è

$$Au^2 + (2A\,sen.\ \widehat{t.x} + B\cos.\ \widehat{t.x})\,t\,u +$$

$$(A\,sen.^2\,\widehat{t.x} + B\,sen.\ \widehat{t.x}\cos.\ \widehat{t.x} + C\cos.^2\,\widehat{t.x})\,t^2 +$$

$$(2A\beta + D)u + [(2A\beta + D)sen.\ \widehat{t.x} + (B\beta + E)\cos.\ \widehat{t.x}]\,t +$$

$$A\beta^2 + D\beta + F = o \ldots . (1)$$

e per avere la trasformata richiesta si dee soddisfare all' eq.[i]

$$2A\,sen.\ \widehat{t.x} + B\cos.\ \widehat{t.x} = o,\ 2A\beta + D = o,$$

per lo che basta fare $tan.\ \widehat{t.x} = -\frac{B}{2A}$, $\beta = -\frac{D}{2A}$.

Profittando della 1.[a] del sist. II pongasi $\frac{x}{\cos.\ \widehat{t.x}}$ per t, si cangi u in y, dividasi per A,

ed avvertendo che in forza dell' eq. ipotetica $2A\beta+D=o$, l' ultimo termine si riduce ad $\frac{1}{2}D\beta+F$, si avrà

$$4A^2y^2=(B^2-4AC)x^2+2(BD-2AE)x+D^2-4AF, \text{ come ec. (*)}$$

§. 370. Due casi qui debbonsi distinguere 1.° che sia $4AC=B^2$ ed allora la ridotta $y^2=ix+l$, sostituendo $x-\frac{l}{i}$ in vece d' x diviene $y^2=ix$, ossia $4A^2y^2+(2BD-4AE)x=o$. 2.° Che abbiasi $4AC>$ ov. $<B^2$. Nell' una e nell' altra di queste ipotesi giova profittare anche dell' indeterminata α del sistema II. L' operazione si rende più semplice sostituendo in primo luogo $x+\alpha$ per x ed $y+\beta$ per y, il che trasforma l' eq. (a) in

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+(2A\beta+B\alpha+D)y+$$
$$(2C\alpha+B\beta+E)x+A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F=o.$$

Pongasi

$$\{2A\beta+B\alpha+D=o,\ 2C\alpha+B\beta+E=o\}\ldots(2)$$

e perchè la somma di queste, respettivamente moltiplicate per β, α, somministra

$$A\beta+B\alpha\beta+C\alpha^2=-\tfrac{1}{2}(D\beta+E\alpha)$$

si ha la ridotta

(*) I valori reali d' x dati dall'eq. $kx^2+ix+l=o$ determinano i limiti N,N' nel senso delle t. Trattandosi di un' ellisse come si è supposto nella Fig.^{a}, al punto k, intermedio ad E, E', corrispondono i limiti O,O' nel senso delle y, e facilmente si prova che OCO' è diametro coniugato per rapporto ad NCN'.

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\tfrac{1}{2}(D\beta+E\alpha)+F=o\,,$$

che indichiamo per

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+G=o\ \ldots.(3)$$

Facciasi $x=t\cos.\hat{t.x}$, $y=u+t.sen.\hat{t.x}$, e sarà

$$Au^2+(2A\,sen.\hat{t.x}+B\cos.\hat{t.x})\,tu+$$

$$(A\,sen.^2\hat{t.x}+B\,sen.\hat{t.x}\cos.\hat{t.x}+C\cos.^2\hat{t.x})\,t^2+G=o$$

eq. i cui primi tre termini coincidono con quelli dell' eq. (1) L' evanescenza del 2.° termine dipende per conseguenza dalla solita ipot. $tan.\hat{t.x}=-B:2A$. Si appura G ricavando α, β dall' eq.[i] (2), cioè

$$\left\{\alpha=\frac{2AE-BD}{4AC-B^2}\,,\ \beta=\frac{BE-2CD}{4AC-B^2}\right\}\ldots(4)$$

e si ha $G=F-\frac{(AE^2+CD^2-BDE)}{4AC-B^2}$

Altro non resta che sostituire $\frac{x}{\cos.\hat{t.x}}$ per t, $-\frac{B}{2A}$ per $tan.\hat{t.x}$, e cangiare u in y onde ottenere

$$(4AC-B^2)x^2+4A^2y^2+4AF+\frac{4A(AE^2-CD^2+BDE)}{4AC-B^2}=o.\ (b)$$

Questa, e l' eq. $4A^2y^2+(2BD-4AE)x=o$ ....(c)

sono le più semplici trasformate, esprimenti tutte le curve comprese nell' eq. (a) ed hanno

il pregio di essere affette da coefficienti cogniti e razionali (*) Per comodo le porremo sotto la respettiva forma

$$Mx^2+Ny^2=Q\ldots(d)\,;\;Ny^2+Px=o\ldots(e)$$

La 1.ª è insignificante se $M>o, N>o$ e $Q<o$, ma prescindendo da questo caso ella rappresenta una curva chiusa che dicesi *ellisse.*

Infatti la x non può crescere oltre un certo limite senza che la y divenga immaginaria.

L' ellisse degenera in circolo quando N diviene $=$ M (il che, a tenore delle formole ottenute sul fine della nota prec., suppo-

(*) Evvi, come vedremo, anche una ridotta della forma $xy=H$, ma dessa spetta ad una curva compresa nell' eq. (d).
Se avessimo sottoposta l' eq. (3) alla trasformazione indicata dal sistema III saremmo giunti con più laborioso calcolo alla trasformata

$$(A\,sen.^2\,t.x + B\,sen.\,\widehat{t.x}\,cos.\,\widehat{t.x} + C\,cos.^2\,\widehat{t.x})\,t^2 +$$
$$[2(A-C)\,sen.\,\widehat{t.x}\,cos.\,\widehat{t.x} + B\,(cos.^2\,\widehat{t.x} - sen.^2\,\widehat{t\,x})]\,in\,tu +$$
$$[A\,cos.^2\,\widehat{t.x} - B\,sen.\,\widehat{t.x}\,cos.\,\widehat{t.x} + C\,sen.^2\,\widehat{t.x}]\,u^2 +$$
$$\tfrac{1}{2}(D\beta + E\alpha) + F = o\,;$$

L' eq. $2(A-C)\,sen.\,\widehat{t.x}\,cos.\,\widehat{t.x} + B\,(cos.^2\,\widehat{t.x} - sen.^2\,\widehat{t.x}) = o$,

facendo $\dfrac{B}{2(A-C)}=\lambda$, ci avrebbe dato

$$cos.\,\widehat{t.x} = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{1}{\sqrt{(1+4\lambda^2)}}\right)}$$

e sostituendo il quadrato di questa formola e quella che ne deriva per $sen.^2\,\widehat{t.x}$ e $sen.\,\widehat{t.x}\,cos\,\widehat{t.x}$ ne' coefficienti di t^2, u^2, si sarebbe ottenuta per essi la respettiva espressione

$$\tfrac{1}{2}\left\{A+C-\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right\},\ \tfrac{1}{2}\left\{A+C+\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right\},$$

che oltre di essere molto incomoda è anche quasi sempre irrazionale:

ne $C=A$ e $B=o$), poichè l'eq. $y^2 + x^2 = \frac{Q}{M}$, dove $x =$ all'ascissa centrale CP, CP', ec. ($F.^a$ 13), $y=$ alla respettiva ordinata rettangola MP, M'P, ec., dimostra che tutte le possibili ipotenuse o raggi CM, CM'' ec. sono eguali a $\sqrt{\frac{Q}{M}}$.

Qualora $N < o$ qualunque sia il segno di Q, a ciascuno de valori $x=\infty$, $x=-\infty$ corrisponde un doppio infinito valore d'y, la curva ha quattro rami infiniti e dicesi *iperbola*.

Passando a contemplare la formola (e) si vede ch'essa mai non risulta insignificante, perchè può sostituirsi $-x$ ad x quando $P < o$; in conseguenza ella si riferisce ad una curva dotata di due rami infiniti: Tal è la curva cui si dà il nome di *parabola.* (*)

I respettivi criterj da'quali dipende che l'eq. (a) rappresenti il circolo, l'ellisse, la parabola e l'iperbola, sono pertanto:

$C=A$ e $B=o$; $4AC>B^2$; $4AC=B^2$; $4AC<B^2$.

Talvolta ci gioverà cangiare le (d), (e) in

$$qy^2+px^2=1 \ldots (d'); \; y^2=px \ldots (e').$$

(*) Le anzidette curve, eccettuato il circolo, furono scoperte da *Platone.* Ei le comprese tutte e quattro sotto il nome di *sezioni coniche*, perchè le riscontrò sulla superficie di un cono retto segato con un piano. Questa geometrica indagine, allora difficilissima, tenne lungamente occupati i matematici. *Apollonio* fu il primo a contemplare le sezioni di qualunque cono di base circolare. *Sereno* Ateniese dimostrò, a disinganno di moltissimi, che può determinarsi un cilindro e questo segarsi in guisa con un piano, che il contorno della sezione coincida con una data ellisse conica.-Tratteremo delle anzidette sezioni nella teoria delle superficie curve a cui esse appartengono.

§. 371 Trattandosi di due curve dotate di centro, se il diametro (a'') (368) incontra ad angolo retto le corde che bipartisce, cioè la retta $y=mx$, parallela alla trasversale $y-y_{\prime}=m(x-x_{\prime})$, è certo ch'esistono due diametri coniugati rettangoli: ma ciò dipende (332 lin. ult.) dalla condizione

$$m=\frac{Am+{}^{1}\!/\!_{2}B}{{}^{1}\!/\!_{2}Bm+C}\ldots(5)$$

e questa dà $m=\frac{1}{B}\left\{A-C\pm\sqrt{(A-C)^2+B^2}\right\}$,

cioè due valori reali per m: dunque ec.

Cerchiamo un'eq. atta a determinare la grandezza Δ degli anzidetti diametri.

Fatto $y=mx$ l'eq. (3) diviene

$$x^2(Am^2+Bm+C)+G=0:$$

D'altronde $\Delta^2\ (=x^2+y^2)=x^2(1+m^2)$: dunque

$$(Am^2+Bm+C)\Delta^2+G(1+m^2)=0,\ \text{cioè}$$

$$[m(Am+{}^{1}\!/\!_{2}B)+({}^{1}\!/\!_{2}Bm+C)]\frac{\Delta^2}{G}+1+m^2=0;$$

e perchè dall'eq. (5) risulta

$$Am+{}^{1}\!/\!_{2}B=m({}^{1}\!/\!_{2}Bm+C),$$

dividendo per $1+m^2$ si ottiene

$${}^{1}\!/\!_{2}Bm+C=-\frac{G}{\Delta^2}\ldots(6)$$

Così l'eq. (5) si cangia in

$$(Am + \tfrac{1}{2} B)\,\Delta^2 + mG = 0$$

e dà $m = -\tfrac{1}{2}\,\frac{B\,\Delta^2}{A\,\Delta^2 + G}$:

pongasi questa espressione nell' eq. (6) e si avrà l'eq. richiesta

$$(4AC - B^2)\,\Delta^4 + 4(A+C)G\,\Delta^2 + 4G^2 = 0 \ldots (f)$$

Da essa infatti si deduce

$$\Delta^2 = \frac{2G}{4AC - B^2}\left\{-(A+C) \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}\right\}$$

quantità sempre reale e sempre positiva, perchè l' esistenza del diametro suppone talmente collocati gli assi coordinati che sia $G < 0$ (368), condizione da cui risulta $\Delta^2 > 0$ perchè $A + C > \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$ se $4AC > B^2$. Nell'ipot. contraria è positivo il fattore $\frac{2G}{4AC - B^2}$, e tale il solo valore $-(A+C) + \sqrt{(A-C)^2 + B^2}$.

Quando $4AC = B^2$ l'eq. (f) dà un solo valore per Δ, cioè $\sqrt{-\frac{G}{A+C}}$, e dimostra che non esiste diametro coniugato.

§. 372. Sia D un semidiametro di una curva dotata di centro, $y = mx$ la retta che ne determina la direzione. L'angolo $\hat{xy}$ essendo qualunque, abbiamo

$$D^2 (= y^2 + x^2 + 2xy\cos.\hat{x.y}) = x^2(m^2 + 1 + 2m\cos.\hat{x.y}),$$

e profittando dell' eq centrale $px^2+qy^2=1$, trasformata in $x^2(p+qm^2)=1$, si ottiene

$$D^2=\frac{m^2+2\cos.\hat{x.y}.m+1}{p+qm^2}\text{, ossia}$$

$$m^2(qD^2-1)-2\cos.\hat{x.y}.m=1-pD^2.$$

Questa eq. prova che due sono le posizioni in cui un semidiametro D può supporsi. Esse riduconsi ad una quando il diametro diviene perpendicolare ad Ax, e per esprimere l' eguaglianza tra' valori di m basta supporre

$$\cos.^2\hat{x.y}=(qD^2-1)(pD^2-1).$$

Scrivendo Δ per D si ha pertanto

$$pq\,\Delta^4-(p+q)\,\Delta^2-\cos^2\hat{x.y}+1=0,$$

eq. le cui risolventi

$$\frac{1}{2pq}\left\{p+q\pm\sqrt{(p-q)^2+4pq\cos.^2\hat{x.y}}\right\}$$

sono reali positive, perchè

$2pq>2pq(2\cos.^2\hat{x.y}-1)$ se $p>0$; una positiva, l' altra negativa se $p<0$; e facendo

$$p=\frac{1}{a_{,}^2},\ q=\frac{1}{\pm b_{,}^2}\quad\text{si cangia in}$$

$$\Delta^4-(a_{,}^2\pm b_{,}^2)\,\Delta^2\pm a_{,}^2b_{,}^2\,\text{sen.}^2\hat{x.y}=0\ldots\ldots(g)$$

I valori di Δ^2 dicansi $a^2, \pm b^2$, e si avranno (T. I. 89) l' eq.^{i}

$$\left\{ a^2 \pm b^2 = a_{\prime}^2 \pm b_{\prime}^2,\ ab = a_{\prime} b_{\prime}\, sen.\, x_{\prime}\hat{}y_{\prime} \right\} \ldots (g')$$

il cui significato costituisce i celebri teoremi di *Apollonio* relativi alle curve dotate di centro, cioè:

I. *Che la somma de' quadrati degli assi nella ellisse, la differenza nell' iperbola, eguaglia la simile funzione de' quadrati di due diametri coniugati.*

II. *Che il rettangolo degli assi equivale al rombo costruito su i diametri coniugati.*

Giova osservare che la 1.ª delle (g') $\pm$ il doppio della 2.ª dà

$$a + b = \sqrt{(a_{\prime}^2 + b_{\prime}^2 + 2\, a_{\prime} b_{\prime}\, sen.\, x_{\prime}\hat{}y_{\prime})}$$

$$a - b = \sqrt{(a_{\prime}^2 + b_{\prime}^2 - 2\, a_{\prime} b_{\prime}\, sen.\, x_{\prime}\hat{}y_{\prime})}$$

Del Circolo.

§. 373. Sia θ l'angolo degli assi coordinati, che supponiamo esterni alla circonferenza, $(x.y)$ un punto di essa, (α, β) il centro, e facendo la distanza di tali punti $= r$ si avrà (335)

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 + 2\,(x-\alpha)(y-\beta)\cos.\theta = r^2, \text{ ossia}$$

$$y^2 + 2\cos.\theta\, xy + x^2 - 2(\alpha\cos.\theta + \beta)y - 2(\alpha + \beta\cos.\theta)x +$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + 2\,\alpha\beta\cos.\theta = r^2 \ldots\ldots (h)$$

Affinchè questa possa rendersi eguale all'eq. (a), i cui coefficienti si suppongono intieri e razionali, bisogna che $\theta = {}^1\!/_2$ ov. ${}^1\!/_3\,\pi$: ma in tal caso

i primi tre termini sono $y^2 \pm xy + x^2$, ed in essi si verifica $4AC - B^2 > 0$, cioè il rapporto caratteristico della ellisse (370) ed esclusivo del circolo (luo. cit.): dunque l' eq. generale (h) non può equivalere ad alcuna eq. razionale di 2.° grado in x, y, spettante al circolo.

Lasciate da parte le coordinate obblique, del tutto inutili ed inopportune, sia $\theta = \frac{1}{4}\pi$ e si avrà

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 = r^2 \ldots. (i) \text{ (eq. gen.}^{\text{le}}\text{)}$$

Si trasferisce l' origine al centro con fare $\alpha = 0$, $\beta = 0$: quindi

$$y^2 + x^2 = r^2 \ldots. (l) \text{ (eq. centrale)}$$

Questa eq. esprime che il raggio è costante, ed egualmente si ottiene partendo dalla proprietà che l' angolo nel semicircolo è retto, e da qualunque altra essenziale al circolo. Sieno θ, θ' gli angoli fatti col diametro da due corde *supplementarie*, tali cioè che insieme sottendano 200.° Siccome $\theta + \theta' = \frac{1}{2}\pi$ si ha (224) $tan.\theta = \frac{1}{tan.\theta'}$: ma $tan.\theta = \frac{y}{r-x}$, $tan.\theta' = \frac{y}{r+x}$: dunque $y^2 + x^2 = r^2$.

L' ipot. $\alpha = r$, $\beta = 0$ suppone l' origine nel sinistro vertice del diametro e dà

$$y^2 = 2rx - x^2 \ldots. (m) \text{ (eq. al vert.)}$$

Per trasferire l' origine in un punto della circonferenza basta supporre $\beta^2 + \alpha^2 = r^2$, ed eliminato r^2 dall' eq. (i) si ottiene

$y^2+x^2-2(\alpha x+\beta y)=0 \ldots . (n)$ (eq. alla circon.)

Es.° Si dimanda la posizione e la grandezza del circolo

$$y^2+x^2-y-x=0.$$

Si eliminano gli ultimi due termini, il che suppone trasferita l'origine nel centro (368), sostituendo $x+\alpha$, $y+\beta$ per x, y, e facendo nella trasformata

$$y^2+x^2+(2\beta-1)y+(2\alpha-1)x+\beta^2+\alpha^2-\beta-\alpha=0$$

$2\beta-1=0$, $2\alpha-1=0$; ciò dà $\beta=1/2=\alpha$;

quindi $r=\frac{1}{\sqrt{2}}$ ed il centro nel punto $(1/2, 1/2)$. Infatti la ridotta $y^2+x^2=1/2$ equivale ad

$$(y-1/2)^2+(x-1/2)^2=1/4.$$

L'origine cade dentro al circolo quando ciascuna delle quantità α, β, $\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}$ è $<r$: allora, supponendo in (i) prima x, poscia $y=0$, ottiensi

$$y^2-2\beta y=r^2-\beta^2-\alpha^2$$

$$x^2-2\alpha x=r^2-\beta^2-\alpha^2$$

cioè $\begin{cases} y=\beta\pm\sqrt{r^2-\alpha^2}=\frac{ib}{id} & (F.^a\ 49) \\ x=\alpha\pm\sqrt{r^2-\beta^2}=\frac{ia}{ic} & \text{è però} \end{cases}$

Teor. $(ib)^2+(id)^2+(ia)^2+(ic)^2=(2r)^2$. (*)

(*) È questa l'undecima Proposizione di *Archimede* nel Libro che ha per titolo *Assumptorum*. In esso provasi che $aob+dlc=bhc+akd$.

§. 374 Se vengono dati tre punti per cui la circonferenza debba passare, le coordinate di ciascuno verificano l' eq. (i) e si ha

$$(y_{,} - \beta)^2 + (x_{,} - \alpha)^2 = r^2$$
$$(y_{,,} - \beta)^2 + (x_{,,} - \alpha)^2 = r^2$$
$$(y_{,,,} - \beta)^2 + (x_{,,,} - \alpha)^2 = r^2 .$$

Si collochi l' origine in $(x_{,}, y_{,})$, conducasi Ax per $(x_{,}, y_{,})$, $(x_{,,}, y_{,,})$, e siccome risulta $x_{,}=0$, $y_{,}=0$, $y_{,,}=0$, si avrà dalle due prime.

$$\beta^2 = r^2 - \alpha^2 , \ \beta^2 = r^2 - (x_{,,} - \alpha)^2 :$$

quindi

$$2\alpha x_{,,} - x_{,,}^2 = 0 , \alpha = \tfrac{1}{2} x_{,,} \ \text{e} \ \beta = \pm \tfrac{1}{2} \sqrt{4r^2 - x_{,,}^2} :$$

La 3.ª si riduce a

$$4r^2 = \left[\frac{x_{,,,}}{y_{,,,}} (x_{,,,} - x_{,,}) + y_{,,,} \right]^2 + x_{,,}^2$$

e determina r. Il doppio valore $\pm \tfrac{1}{2} x_{,,}$ competente ad α, combinato con quello di β, dimostra che i tre punti possono essere similmente situati in ciascuno de' quattro angoli degli assi.

§. 375 Per adattare al circolo espresso con l' eq. (h) la formola (a') (368) basta farvi

$$A=1 , B=0 , C=1 , D=0 , E=0 , F=-r^2 .$$

Risulta $\delta^2 + \frac{2(my_{,} + x_{,})}{\sqrt{(1+m^2)}} \delta = r^2 - x_{,}^2 - y_{,}^2 \ldots (7)$

eq. che dimostra i teor. sulla nota proporzione reciproca, relativa alle corde ed alle seganti che s'incontrano, perchè [89] il prodotto de'due valori di δ è costante ed $= r^2 - x_{,}^2 - y_{,}^2$.

Per far sì che il punto $(x_{,}, y_{,})$ cada sulla metà di una corda si dee supporre $my_{,} + x_{,} = 0$ cioè $y_{,} = -\frac{1}{m} x_{,}$. Siccome la trasversale $y - y_{,} = m(x - x)$ (368) è parallela ad $y = mx$, apparisce (332 crit. II) che i punti medj delle corde circolari esistono nella retta, che passando pel centro le incontra perpendicolarmente.

Sia d la differenza de' valori di δ dati dall' eq. (7) e si avrà

$$d = \frac{2}{\sqrt{(1+m^2)}} \sqrt{[r^2(1+m^2) - (y_{,} - mx_{,})^2]} \quad \ldots (8)$$

$$m = \frac{4}{4(r^2 - x_{,}^2) - d^2} \left\{ -x_{,}y_{,} \pm \sqrt{[r^2(x_{,}^2 + y_{,}^2 - r^2) - \tfrac{1}{4}d^2(y_{,}^2 + x_{,}^2) - \tfrac{1}{2}d^2r^2 - \tfrac{1}{16}d^4} \right\}.$$

Quando $d = 0$, nel qual caso la segante divien tangente,

$$m = \frac{-x_{,}y_{,} \pm r\sqrt{x_{,}^2 + y_{,}^2 - r^2}}{r^2 - x_{,}^2} \quad \ldots\ldots (9)$$

formola che si riduce ad $m = \frac{r}{\sqrt{(r^2 - \delta'^2)}}$ se l'asse Ax si fa cadère sulla retta δ' che unisce il centro col punto $(x_{,}, y_{,})$, perchè si ha $x_{,} = \delta'$ ed $y_{,} = 0$: (*)

(*) Il giovine attento impari a supplire all' astrazione del calcolo descrivendo o immaginando la figura.

L'eq. della tangente condotta per un punto esterno (x_i, y_i) è dunque

$$y-y_i=\frac{r}{\sqrt{(r^2-\delta'^2)}}(x-x_i)\ldots(10)$$

Se il punto (x_i, y_i) è nella circonferenza si ha $x_i^2+y_i^2=r^2$, l'eq.[i] (9), (10) divengono

$$m=-\frac{x_i}{y_i},\ yy_i+xx_i=r^2\ldots[11]$$

e la 2.ª, facendo $y=0$ dà $x=\frac{r^2}{x_i}$, distanza fra 'l centro ed il punto in cui la tang. incontra Ax.

§. 376. La formola (8), posto Ax sulla retta δ', si riduce a

$$d=\frac{2}{\sqrt{(1+m)}}\sqrt{[r^2(1+m^2)-m^2x_i^2]}:$$

quindi $m=\sqrt{\frac{4r^2-d^2}{4x_i^2-(4r^2-d^2)}}$, e mediante questo valore l'eq. $y-y_i=m(x-x_i)$ divien quella della trasversale, condotta in guisa per (x_i, y_i), che il suo semmento compreso nel circolo sia $=d$.

§. 377 La retta perpendicolare alla tangente nel contatto (x_i, y_i) dicesi *normale* e si concepisce limitata fra il contatto ed il diametro su cui si contano le ascisse. Per averne l'eq.

$$y-y_i=\frac{y_i}{x_i}(x-x_i) \text{ ossia } yx_i-xy_i=0\ldots(12),$$

siccome per rapporto alla tangente si è trovato

$m=-\frac{x_{,}}{y_{,}}$, basta cangiare nell' eq. (10)

$\frac{r}{\sqrt{(r^2-\delta'^2)}}(=m)$ in $-1:\frac{-x_{,}}{y_{,}}$ (318).

§. 378 Per tirare la tangente da un punto esterno M $(x_{,}, y_{,})$ (F.ª86) si pongano nell' eq. (11) le coordinate $x_{,,}, y_{,,}$ del contatto, in vece d' x, y, e fatta la sottrazione di

$$y_{,}y_{,,}+x_{,}x_{,,}=r^2 \text{ da } x_{,,}^2+y_{,,}^2=r^2 \text{ si avrà}$$

$$(y_{,,}-{}^1\!/\!_2 y_{,})^2+(x_{,,}-{}^1\!/\!_2 x_{,})^2={}^1\!/\!_4(x_{,}^2+y_{,}^2)\ldots(3)$$

Essendo C il centro si divida la MC per metà in C', e descritto il circolo col centro C' ed il raggio C'C si avrà

$$C'P'={}^1\!/\!_2 y_{,},\ CP'={}^1\!/\!_2 x_{,},\ CC'={}^1\!/\!_2\sqrt{x_{,}^2+y_{,}^2}:$$

Sia C'r parallela a CP, e sarà

$$Nr=y_{,,}-{}^1\!/\!_2 y_{,},\ C'r={}^1\!/\!_2 x_{,}-x_{,,}\ (*)$$

quindi $\overline{Nr}^2+\overline{C'r}^2=\overline{C'N}^2=\overline{C'C}^2$; e però il circolo descritto come sopra passa per l' uno e l'altro contatto N, n.

§. 379. Su due rette ortogonali dx, dy (F.ª87) sieno due semicircoli che s' incontrino in M. Condotti i raggi Ma, Mc, nasce un tetragono in cui D=A, C=B, CD= ½ π. Supponendo retto anche $\hat{b}$ l' eq.ⁱ (1), (2) del §. 259 divengono

(*) Si ha $x_{,,}-{}^1\!/\!_2 x'$ quando p cade alla sinistra di C: succede lo stesso se si considera il punto n.

$A\,sen.a' + B(cos.a'-1)=0$, $A\,sen.a' + B(cos.a'-1)=0$.

Ma queste prese insieme equivalgono ad una identità: dunque

Teor. *Due circoli i cui diametri s'incontrino in un estremo ad angolo retto, s'intersegano sotto lo stesso angolo.*

§. 380 Teor. Se dal centro C di un dato circolo EFG (F.ª 88) si conduce la perpendicolare CH ad una data retta AB, essendo E,G, i punti in cui la perpendicolare taglia la circonferenza, una trasversale per G che incontri AB in D, la circonf.ª in F, dà DG.GF=GE.GH. Ciò risulta da' trigoni simili EFG, DGH.

Il teor. si cangia in *porisma* (*) enunciandolo così:

Porisma. *Dato un circolo ed una retta AB vi è nella circonferenza un punto* G *tale, che tirando per esso una trasversale* DGF, *il rettangolo* DG.GF *riesce costante*. Infatti D′G.GF′=DG.GF.

§. 381 Per applicare la formola

$$d=\frac{2}{\sqrt{(1+m^2)}}\sqrt{r^2(1+m^2)-m^2x_{,}^2}\,(376)^*$$

a due circoli i cui raggi r, r' e la distanza de' centri $=\delta$, si riguardino m, $x_{,}$ come incognite, indi si ponga r' per r ed $x_{,}+\delta$ per $x_{,}$ onde avere

$$d=\frac{2}{\sqrt{(1+m^2)}}\sqrt{[r'^2(1+m^2)-m^2(x_{,}+\delta)^2]}.$$

(*) La natura del porisma non è peranche ben definita da' Geometri: Montucla (T. I.) lo riguarda come intermedio al probl. ed al teor.

Qualora il semmento d sia noto ed eguale in ambedue i circoli, deducasi

$$m=\sqrt{\frac{r^2-{}^1/_4 d^2}{x_{,}^2-(r^2-{}^1/_4 d^2)}},\quad m=\sqrt{\frac{r'^2-{}^1/_4 d^2}{(x_{,}+\delta)^2-(r'^2-{}^1/_4 d^2)}},$$

e fatto il confronto si avrà

$$x_{,}=-\frac{\delta\sqrt{r^2-{}^1/_4 d^2}}{\sqrt{r^2-{}^1/_4 d^2}\pm\sqrt{r'^2-{}^1/_4 d^2}}$$

formola che facilmente si costruisce, ed il cui valore serve alla determinazione di m, tangente dell' angolo che la trasversale $y-y_{,}=m(x-x_{,})$ dee fare con l' asse Ax condotto pel centro de' due circoli, onde il semmento sia lo stesso ed $=d$, per rapporto all' uno ed all' altro circolo.

Se $x_{,}=r$ si ha $d=\frac{2r}{\sqrt{(1+m^2)}}$, formola per cui si dimostra

Teor. *Tirate pel contratto* A (F.ª 89) *le corde* AD, AD', *se queste superiormente si prolungano sinchè incontrino la circonferenza maggiore in* B, B', *risulta* BB' *parallela* a DD'. Infatti

$$AD=\frac{2r}{\sqrt{(1+m^2)}},\ AB=\frac{2r'}{\sqrt{(1+m^2)}},\ AD'=\frac{2r}{\sqrt{(1+m_{,}^2)}},\ AB'=\frac{2r'}{\sqrt{(1+m_{,}^2)}},$$

e però AD : AB : : AD' : AB'.

§. 382. Teor. *Essendo* AB, *ab* (F.ª 90) *diametri paralleli di due circoli che si toccano in* M, *i punti* M, *b*, B, *sono in linea retta.*

Dim.ne Si ha $C\hat{B}M = C\hat{M}B$ (perchè CB, CM sono raggi dello stesso circolo) $= M\hat{b}c'$ (attese le parallele) : ma $C\hat{B}M + B\hat{b}c = \pi$: Dunque $M\hat{b}c + B\hat{b}c = \pi$ e però ec.

Con eguale facilità si vede che $c'\hat{b}'M = c'\hat{M}b' = M\hat{B}C$; e per conseguenza $c'\hat{M}b'$ opposto al vertice di $C\hat{M}B$.

§. 383. Teor. *Diviso comunque il diametro* AB *in* D (F.a 91) *se si descrivono i semicircoli* ALD, DNB, *e si alza in* D *la perpendicolare* Dm, *lo spazio* AmBNDLA (*l'arbelo* degli antichi) *risulta eguale al circolo il cui diametro è* Dm. Dim.ne A ciascun membro dell'eq. $AD.DB = (Dm)^2$ aggiungasi $AD.DB + (DA)^2 + (DB)^2$ e si avrà $(AB)^2 = 2(Dm)^2 + (AD)^2 + (DB)^2$, cioè $(AB)^2 - (AD)^2 - (DB)^2 = 2(Dm)^2$, e sostituiti i semicircoli ai quadrati de' diametri resta ec.

§. 384. Teor. *I circoli che toccano la* DM, *la concavità del semicircolo maggiore e la convessità del minore corrispondente, sono eguali.* Dim.ne Essendo a, c, d, i contatti di uno de' circoli proposti, si ha il diametro db parallelo ad AB, perchè normali entrambi alla Dm. Sia C l' incontro di Dm e di Aba (lin. retta pel teor. antiprec.). La Bda è pur retta e normale ad AC; retta la bcD, retta Acd che si prolunga sino ad AmB in e: si ha Be normale ad Ae, CeB linea retta (*); e perchè $A\hat{c}D = A\hat{e}B = \frac{1}{2}\pi$,

(*) Considerando il trigono ACB si vede, che siccome le perpendicolari dai vertici sui lati si tagliano in un sol punto, Ade incontra CB ad angolo retto: ma Ae perpendicolare a Be per costruzione: dunque la Be prolungata passa per C.

sussiste AC : bC : : AD : bd : : AB : DB; quindi AD.DB$=bd$.AB; e siccome lo stesso vale pel 2.° circolo inscritto, ne segue che il suo diametro sia $=bd$, cioè ec. Succede lo stesso se i circoli ALD, DNB, s' intersegano. Mediante l' eq. AD.DB$=bd$.AB, dato il rapporto di AD a DB si ha quello de' diametri bd, AB; e dato il valore di AB, AD, si ha la superficie del circolo inscritto.

§. 385. Probl. 1.° Si ha un circolo e se ne vogliono descriver due in guisa, che siavi contatto fra tutti e tre, ed il trigono proveniente dall' unione de' centri somigli ad un trigono dato. Soluz.ne Sieno C, C′, C″ i centri (F.a 92); A, B, G, i contatti: CA$=r$, C′A$=x$, C″B$=y$, abc il trigono dato, $ab=\alpha$, $ac=\beta$, $bc=\gamma$, e siccome C′C″$=x+y$ si avrà

$$\beta:\alpha::x+y:r-x;\quad \beta:\gamma:x+y:r-y \text{ cioè}$$

$$(\alpha+\beta)x+\alpha y=\beta r,\quad (\beta+\gamma)y+\gamma x=\beta r.$$

Dalla 2.a $y=\dfrac{\beta r-\gamma x}{\beta+\gamma}$; la 1.a diviene

$$(\alpha+\beta)x+\frac{\alpha}{\beta+\gamma}(\beta r-\gamma x)=\beta r.$$

Dunque $x=\dfrac{r(\beta+\gamma-\alpha)}{\alpha+\beta+\gamma}$, $y=\dfrac{r(\alpha+\beta-\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}$.

Per C si tirino sotto l' angolo b i raggi CA, CG, e presa AC′$=x$, GC″$=y$, si avrà ec.

Probl. 2.° È data la corda $AB=a$ nel noto circolo AFL (F.ª 93) e si dimanda un punto D tale, che tirando BI perpendicolare sulla retta AD, risulti $AI+BI=BD+DI$. Soluz.ⁿᵉ Sia il diametro EF $(=2r)$ normale ad AB, FG $(=r-\sqrt{r^2-{}^1\!/\!_4a^2})=b$, $GC(=r-b)=c$, $CH=x$, $c+x=z$ e si avrà

$$DH=\frac{(r-x)(r+x)}{AH}=\frac{r^2-x^2}{\sqrt{(\frac{a^2}{4}+z^2)}}.$$

Dai trigoni simili AGH, ABI, risulta

$$AI=\frac{{}^1\!/\!_2a^2}{AH},\quad BI=\frac{az}{AH}\ ;\ \text{e siccome}$$

$DI=DH-(AI-AH)$ e $BD=\sqrt{[\overline{BI}^2+\overline{DI}^2]}$, l'eq. del probl., o l'equivalente $[(AI+BI)-DI]^2=(BD)^2$, comparisce sotto la forma

$$({}^1\!/\!_2a^2+az)^2-2({}^1\!/\!_2a^2+az)(r^2-x^2-{}^1\!/\!_2a^2+\overline{AH}^2)+(r^2-x^2-{}^1\!/\!_2a^2+\overline{AH}^2)^2=$$
$$a^2z^2+(r^2-x^2-{}^1\!/\!_2a^2+\overline{AH}^2)^2;$$

Soppressi i termini comuni, perchè $r^2-{}^1\!/\!_4a^2=c^2$, ed $x^2=(z-c)^2$, resta

$${}^1\!/\!_4a^4+a^3z-(a^2+2az).2cz=0,$$

ossia $$z^2+\frac{2ac-a^2}{4c}z=\frac{a^3}{16c}\ (*)\ :\ \text{quindi}$$

(*) Questo probl. è uno di quelli che siamo soliti proporre per esercizio, giacchè, se prescindasi da ogni artifizioso compendio, esige un' operazione laboriosissima. Così i giovani cominciano a conoscere per prova l'importanza delle adattate sostituzioni.

$$z=\frac{a}{8c}\left\{a-2c+\sqrt{a^2+4c^2}\right\} \text{ ed } x=z-c,$$

formola che facilmente si costruisce.

Probl. 3.° Sul prolungamento BD del diametro AB (F.ª 50) di un circolo cognito BfA è dato un punto D, e si vuol condurre una trasversale Dab tale, che il trigono isogono il cui lato Db, eguagli il pentagono regolare costruito sul semmento esterno Da. Soluz.ne Sia $BD=a$, $AD=b$, $ab=y$, $bD=x$. La superficie del trigono è (254) $={}^1/_4 x^2\sqrt{3}$, quella del pentagono (319)

$${}^5/_4 y^2 cot.\frac{\pi}{5}=y^2\,{}^5/_4.\ tan.\ 54.^\circ(\text{sessag.})=y^2.{}^5/_4\times 1,3763819$$

$$=1,720477\,y^2;\ \text{perciò}\ 1,720477\,y^2=x^2.{}^1/_4\sqrt{3}....[1]$$

Le seganti AD, bD, danno (Geom.ª) $x(x-y)=ab$, quindi

$$x={}^1/_2[y\pm\sqrt{4ab+y^2}]\ \text{ed}\ x^2=ab+{}^1/_2y^2\pm{}^1/_2y\sqrt{4ab+y^2}$$

L'eq. [1], perchè $\sqrt{3}=1,7320508$,

$${}^1/_4\sqrt{3}=0,4330127,\ \frac{1,720477}{0,433012}=3,973272...$$

si riduce a

$$[3,973272-0,5]y^2-ab=y.{}^1/_2\sqrt{4ab+y^2}\ \text{ossia}$$

$$3,473272.y^2-ab=y.{}^1/_2\sqrt{4ab+y^2}$$

e fatto il quadrato e la riduzione

$$11,813621.y^4-7,946545.ab\,y^2+a^2b^2=0$$

Pongasi $y^2 = u$ ed effettuata la divisione per 11,81 ... si avrà

$$u^2 - 0,6726\, ab.u + 0,0846.\, a^2 b^2 = 0$$

Probl. 4.° Dato un numero n di punti in un piano, assegnarvene uno tale, che sommando il quadrato della sua distanza da ciascuno de' punti dati ne provenga una determinata superficie a^2 Soluz.ne L' eq. del probl. è

$$n(y^2 + x^2) - 2[x_{,} + x_{,,} + x_{,,,} \text{ec.}]x - 2[y_{,} + y_{,,} + y_{,,,} \text{ec.}]y = a^2 - [x_{,}^2 + x_{,,}^2 + x_{,,,}^2 \text{ ec. } + y_{,}^2 + y_{,,}^2 + y_{,,,}^2 \text{ ec.}]$$

Questo elegante e facil probl. è contemplato da *Apollonio* nell'opera che ha per titolo *Loca Plana*

Riserbiamo all' esercizio scolastico i seg.

Probl. 1.° *Condurre una trasversale che seghi due circoli dati in guisa, che le parti comprese nella concavità di ciascuno sieno eguali ad una data retta.*

2.° e 3.° *Data una retta, ovvero un circolo, e due punti nel piano stesso, descrivere un circolo che passi per questi e tocchi l' uno o l' altra.*

4.°, 5.° e 6.° *Disegnare un circolo che passi per un punto e tocchi due rette, una retta ed un circolo, due circoli.*

7.°, 8.°, 9.° e 10.° *Si domanda un circolo che tocchi tre rette esistenti in un piano, due rette ed un circolo, due circoli ed una retta, tre circoli.*

Della Ellisse

§. 386 L'eq. $My^2 + Nx^2 = Q$ [370] dove M, N, Q si suppongono positivi, insegna che il massimo valore d'y corrisponde ad $x = 0$ e viceversa. Tali valori, $\sqrt{\frac{Q}{M}}$, $\sqrt{\frac{Q}{N}}$, sono i respettivi semidiametri coniugati $b_,$, $a_,$, a cui la curva è riferita. Basta sostituire $\frac{Q}{b_,^2}$, $\frac{Q}{a_,^2}$ ad M, N per avere l'eq. ellittica sotto una delle forme equivalenti

$$\left\{a_,^2 y^2 + b_,^2 x^2 = a_,^2 b_,^2 ;\ y^2 = \frac{b_,^2}{a_,^2}(a_,^2 - x^2)\right\} \ldots [A].$$

Se $a_,$, $b_,$ differiscono da' valori di Δ [371] la curva è riferita ai diametri coniugati, il cui angolo, qualora non sia dato, si calcola mediante la 2.ª delle [g'] [372]. Sia per es.° l'eq.

$$9y^2 + x^2 + 6y + 2x - 144 = 0.$$

La sua ridotta [b] [370] è $9y^2 + x^2 - 144 = 0$ e dà $a_, = 12$, $b_, = 4$. Per sapere se questi semidiametri sieno i semiassi a, b, risolvasi l'eq. [f], e siccome ne proviene $\Delta = 12, = 4$, si concluderà ec.

§. 387, Suppongasi riferita l'ellisse ai diametri rettangoli AB $(= 2a)$, DE $(= 2b)$ (*F.*ª 94). L'eq. [A] dimostra che la y diviene immaginaria quando $x > a$, che rimane la stessa se ad x si sostituisce $-x$ [$=$CP']; che ad

ogni valore d' x ne corrispondono due d' y, PM, Pm, eguali e di segno contrario. La curva è dunque, come si disse, compresa in uno spazio finito, e composta di quattro rami eguali e simili AD, AE, BD, BE.

L' eq. [A], come pure l' eq. al vertice

$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2]$, che ottiensi facendo

AP$=x$, mostrano *che i quadrati di due ordinate stanno come i rettangoli delle ascisse.*

Che il punto C sia il centro si prova con prendere CP′ = CP ed alzare l' ordinata P′M′, poichè i trigoni eguali CPM, CP′M′ danno CM = CM′ ed $\hat{MCP} = \hat{M'CP'}$, dal che risulta essere la MCM′ una retta dimezzata in C.

Non si ha che da confrontare l' eq. prec. con quella del circolo circoscritto, per vedere che ogni ordinata ellittica sta alla corrispondente ordinata circolare come b ad a.

§. 388. Siccome a qualunque retta, la cui lunghezza sia intermedia a o, b, può assegnarsi un' eguale ordinata ellittica ortogonale $y_{,}$, è permesso di supporre ∺ $a : b : y_{,}$ e però $\frac{b^2}{a^2} = \frac{y}{a}$. Questo valore di $\frac{b^2}{a^2}$, scrivendo $x_{,}$, $y_{,}$ per x, y, cangia l' eq. $y^2 = \frac{b^2}{a^2}[a^2 - x^2]$ in $y_{,} = \frac{1}{a}[a^2 - x_{,}^2]$ e. Facciasi $2y_{,} = p$, $x_{,} = c$ onde avere $\frac{1}{2}ap = a^2 - c^2$, e perchè $\frac{b^2}{a^2}\left(= \frac{y_{,}}{a}\right) = \frac{p}{2a}$ somministra $\frac{1}{2}ap = b^2$ si otterrà $b^2 = a^2 - c^2$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Così l' eq. [A] si riduce alle forme equivalenti

$$y^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2),\ y^2 = \frac{p}{2a}(a^2 - x^2).$$

La 2.ª ridotta al vertice, cioè $y^2 = \frac{p}{2a}(2ax - x^2)$ rappresenta tutte le curve di 1.° ord. poichè

$p = 2a$ dà il circolo: $p > 0$ e $< 2a$ l' ellisse:

$p < 0$ l' iperbola; $a = \infty$ la parabola.

Chiamando d l' ascissa corrispondente all' ordinata $\frac{1}{2}p$ computata dal vertice dell' asse AB, ascissa $= a - c$, risulta

$$\tfrac{1}{2}\,ap = 2ad - d^2;\ \text{quindi } p < 4d,\ a = \frac{2d^2}{4d - p},$$

e l' eq. della ellisse si trasforma in

$$y^2 = px - \frac{p(4d - p)}{4d^2}x^2,\ \text{eq. talvolta utile.}$$

§. 389 Sieno F, F' i punti a cui corrispondono le ordinate $\frac{1}{2}p$ onde GF < 4 AF. Si ha CF $(= c) = \sqrt{a^2 - b^2}$, che dicesi *eccentricità*, e CF $= \sqrt{(\overline{FD}^2 - b^2)}$. Dunque

1.° FD $= a =$ CA $=$ F'D, ed il circolo il cui centro in D, il raggio CA, taglia AB in F, F'.

2.° Prolungata la FG sino al circolo AQB in H si ha

$$\overline{FH}^2 = \text{AF.FB} = 2ac - c^2 = b^2,\ \text{cioè FH} = \text{CD}.$$

3.° Risulta $FM = \sqrt{[\overline{PM}^2 + (CF - CP)^2]}$
$= \sqrt{[\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) + (\sqrt{a^2 - b^2} - x)^2]} = a - \frac{cx}{a}$.

Così $F'M = a + \frac{cx}{a}$ e però $FM + F'M = 2a$.

Si ottiene lo stesso, ma per mezzo di una formola utile nell' Astronomia, prolungando MP finchè tagli il circolo circoscritto in un punto L, e facendo $L\hat{C}P = \theta$, poichè risulta

$$x\ (= CP) = a \cos.\theta,$$

$$\overline{MP}^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}(a^2 - x^2) = (a^2 - c^2)(1 - \cos.^2\theta)$$

$$\overline{PF'}^2 = (a \cos.\theta + c)^2,$$

$$F'M\ [= \sqrt{(\overline{MP}^2 + \overline{PF'}^2)}] = a + c \cos.\theta.$$

Così $FM = a - c \cos.\theta$ e però ec.

Segue dalla proposizione del n.° 3.° *che la somma delle distanze di uno de' punti* F, F' *dai vertici di un diametro sia* $= 2a$.

Stabiliti gli estremi di un filo in F, F', un ago che scorra lunghesso tendendolo egualmente, descrive un' ellisse. (*)

4.° Prolungata la F'M (F.ª 95) finchè MG=MF, se per M e pel punto medio *m* della FG si conduce la retta QMT, essa è tangente in M,

(*) Trattandosi di un' operazione in piccolo si noti sull' asse AB un punto K: centro in F, raggio AK, indi centro in F', raggio BK si descrivano due archi e la loro intersezione sarà nella ellisse. Si prenda in AB un 2.° punto K', e così in seg.

poichè per rapporto a qualunque altro suo punto n si ha $F'nG$ ossia $F'nF > F'G$ $(= F'M + FM = 2a)$. Ma per essere FMG isoscele ed m il punto medio di FG si ha $F\hat{M}T = T\hat{M}G = F'\hat{M}Q$. Dunque le rette FM, F'M fanno un angolo eguale con la tangente al punto M.

4.° Condotte sulla QMT le perpendicolari Fm, $F'm'$ si ha $Fm = \frac{1}{2} FG$, $FC = \frac{1}{2} FF'$; quindi Cm parallela ad F'G ed $= \frac{1}{2} F'G = \frac{1}{2}(F'M + FM) = a$. Così $Cm' = a$ e però i punti m, m' sono nella circonferenza del circolo circoscritto all'ellisse.

Siccome i raggi luminosi o sonori fanno l'angolo d'incidenza eguale a quello di riflessione, se si concepisce generata una superficie mediante la rivoluzione della semiellisse AMB intorno ad AB, tutti i raggi che partono dal punto F, si raccolgono (n.° 3.°) in F' e vicev.

Quindi i punti F, F' diconsi *fuochi*; la doppia ordinata p che vi passa è il *parametro*, le rette FM, F'M, i *raggi vettori*.

§. 390. Posto $FM = z$ e $C\hat{F}M = \hat{a.z}$, si ha $y = z\, sen.\, \hat{a.z}$, $x [= CF \pm FP] = c \pm z \cos.\, \hat{a.z}$, l'eq. (A) diviene

$$(a^2 sen.^2 \hat{a.z} + b^2 \cos.^2 \hat{a.z}) z^2 - 2b^2 c \cos. \hat{a.z} \times z = b^4$$

e risolvendola somministra l'eq. *polare*

$$z = \pm \frac{b^2}{a \mp c \cos. \hat{a.z}} = \pm \frac{a^2 - c^2}{a \mp c \cos. \hat{a.z}} = \pm \frac{p}{2(1 \mp \frac{c}{a} \cos. \hat{a.z})},$$

espressioni di cui la 2.ª, per essere $\cos. \widehat{a,z} = \frac{c-x}{z}$, equivale a

$$z = \frac{\pm a^2 \mp cx}{a} \quad (*)$$

§. 391. Combinando l'eq. (a)[367] con $y=a_{,}x+b_{,}$, si determinano i punti in cui una curva di 1.° genere viene incontrata da una retta. Siccome l'eq. che si ottiene eliminando x od y è di 2.° grado si ha una doppia intersezione se le sue risolventi sono reali e diverse, un punto di contatto se reali e identiche.

Sia $y-y_{,}=a'(x-x_{,})$ una trasversale condotta per un punto $(x_{,}, y_{,})$ di una data ellisse $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$. La eliminazione d'y dà

$$a^2a'^2(x-x_{,})^2+2a^2a'y_{,}(x-x_{,})+a^2y_{,}^2+b^2x^2-a^2b^2=0,$$

Pongasi $a^2b^2-b^2x_{,}^2$ per $a^2y_{,}^2$ e si avrà

$$(x-x_{,})[a^2a'^2(x-x_{,})+2a^2a'y_{,}+b^2(x+x_{,})]=0$$

Il 1.° fattore $x-x_{,}$ riproduce il noto valore $x=x_{,}$; dal 2.°

$$x=\frac{(a^2a'^2-b^2)x_{,}-2a^2a'y_{,}}{a^2a'^2+b^2},$$

ed i due valori d'x sono eguali se $a'=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_{,}}{y_{,}}$.

Dunque l'eq. della tangente nel punto $(x_{,}, y_{,})$ è

$$y-y_{,}=-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_{,}}{y_{,}}(x-x_{,}) \ldots (1)$$

(*) Dipende da questa formola la trasformazione adoperata da *Lalande* nel così detto Probl. di *Keplero* (Astron. T. 2. §. 1240).

ossia $a^2 y y_{,} + b^2 x x_{,} = a^2 b^2 \ldots\ldots (2)$

ed opportunamente si riduce alle due seg. forme

$$y = \frac{b^2}{y_{,}} - \frac{b^2}{a^2} \frac{x_{,}}{y_{,}} . x \ldots . (3)$$

$$y = a' x + \sqrt{(a^2 a'^2 + b^2)} \ldots (4)$$

Di fatto $a' = -\frac{b^2}{a^2} . \frac{x_{,}}{y_{,}}$ somministra

$$a'^2 y_{,}^2 = \frac{b^2}{a^2} . \frac{b^2}{a^2} x_{,}^2 = \frac{b^2}{a^2} \left[a^2 \frac{(b^2 - y_{,}^2)}{a^2} \right] = \frac{b^2}{a^2} (b^2 - y_{,}^2)$$

cioè $(a^2 a'^2 + b^2) y_{,}^2 = b^4$ e però ec.
La formola (2) facendo $y = o$ dà subito

$$x = \frac{a^2}{x_{,}} = \text{CT} : \text{quindi CP.CT} = a^2 \text{ e CT} - \text{CP}$$

ossia $\text{PT} = \frac{a^2 - x_{,}^2}{x_{,}}$ (sottang.) ....(5)
espressione indipendente da b e dal segno d'$y_{,}$

L'eq. della normale in un punto ellittico $(x_{,}, y_{,})$

è (332 e 391 eq. (1)) ... $y - y_{,} = \frac{a^2 y_{,}}{b^2 x_{,}} (x - x_{,}) \ldots (6)$

Posto $y = o$ essa dà $x = \frac{(a^2 - b^2) x_{,}}{a^2} = \text{CN}$: quindi

$$\text{PN} (= \text{CP} - \text{CN}) = \frac{b^2 x_{,}}{a^2} \text{ (sunnorm.)} \ldots (7)$$

Dunque $\begin{cases} \text{MT}[= \sqrt{(y_{,}^2 + \overline{\text{PT}}^2)}] = \sqrt{[b^2 - \frac{b^2}{a^2} x_{,}^2 + (\frac{a^2 - x_{,}^2}{x_{,}})^2]} ; \\ \text{MN}[= \sqrt{(y_{,}^2 + \overline{\text{PN}}^2)}] = \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - c^2 x_{,}^2} . \end{cases}$

Prolungando la MN sino a DE in N' si ha da' trigoni simili

MNP, CNN', MN : PN : : NN' : CN ;

Quindi $NN' = (\frac{a^2 - b^2}{a^2} x_, . \frac{b}{a^2} \sqrt{a^4 - c^2 x_,^2} : \frac{b^2}{a^2} x_,$

cioè $NN' = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b} \sqrt{a^4 - c^2 x_,^2}$

e però $MN' = \frac{1}{b} \sqrt{a^4 - c^2 x_,^2}$: dunque

Teor. Si ha MN.MN' = FM . F'M ed MN : MN' : : $b^2 : a^2$.

La sottangente essendo la stessa per tutte le ellissi il cui 1.° asse AB = $2a$, e pel circolo concentrico il cui diametro AB (F.ª 96) se vuolsi la tangente in un dato punto M si prolunghi l'ordinata PM sino al circolo e conducasi la tangente all' incontro M'

Preso ad arbitrio un punto M', la proporzione $a : b$: : PM' : PM dà il punto M : congiunti M, T si alzi in M la perpendicolare ad MT e si avrà nel tempo stesso un punto del perimetro ellittico ; la tangente e la normale respettiva : ricerche interessanti per la costruzione delle volte.

§. 392. Trattandosi di condurre la tangente da un punto esterno T' $(x_{,,}, y_{,,})$ (F.ª 97) si determina il contatto $(x_,, y_,)$ combinando l'eq. ellittica $a^2 y_,^2 + b^2 x_,^2 = a^2 b^2$ con

$a^2 y_{,,} y_, + b^2 x_{,,} x_, = a^2 b^2$, eq. della tang. richiesta.

La risultante

$$(a^2 y_{\prime\prime}^2 + b^2 x_{\prime\prime}^2) y_\prime^2 - 2 a^2 b^2 y_{\prime\prime} y_\prime = b^4 (x_{\prime\prime}^2 - a^2)$$

ha le risolventi reali perchè può collocarsi l'origine in A ovvero in B, onde sia $x_{\prime\prime} > a$.

Descritti due archi, uno col centro F, fuoco il più distante da T', ed il raggio IF$=2a$, l'altro col centro T' ed il raggio TF', congiungasi F coll' intersezione I degli archi e questa retta passerà pel contatto M. Infatti T'F' = TI, FM + IM $= 2a$ e però IM = MF': dunque T'M bispartisce ad angolo retto la F'I e però (389 n.° 4.°) essa è tangente in M. La 2.ª intersezione I' dà un 2.° contatto M'.

§. 393. Se nell'eq. (4) (391) si fa $x=a$, poi $x=-a$, indicando per Bt, At''' (F.ª 98) le respettive ordinate, si ottiene:

Teor. $Bt \times At''' = b^2$.

§. 394 Pongasi in

$$p = \frac{y_\prime - a x_\prime - b}{\sqrt{(1+a^2)}}$$ [337 for. (9)] $y_\prime = 0$, $x_\prime = c$;

indi $y_\prime = 0$, $x_\prime = -c$; ai coefficienti a, b dell'eq. $y = a x + b$ si sostituiscano quelli della tangente ellittica, cioè $-\frac{b^2 x_\prime}{a^2 y_\prime}$, $\frac{b^2}{y_\prime}$, e chiamato $p_\prime$, $p_{\prime\prime}$ il respettivo valore F't, Ft'' della perpendicolare p, si avrà

$$p p_{\prime\prime} = \left[\left(-\frac{b^2 x_\prime}{a^2 y_\prime} . c - \frac{b^2}{y_\prime}\right)\left(\frac{b^2 x_\prime}{a^2 y_\prime} c - \frac{b^2}{y_\prime}\right)\right] : \left[\frac{a^4 y_\prime^2 + b^4 x_\prime^2}{a^4 y_\prime^2}\right]$$

$$= \frac{a^4 b^4 - b^4 x_\prime^2 c^2}{a^4 y_\prime^2 + b^4 x_\prime^2}$$; e perchè

$a^2 y_{,}^2 + b^2 x_{,}^2 = a^2 b^2$ dà $a^4 y_{,}^2 = a^4 b^2 - a^2 b^2 x_{,}^2$,

Teor. $p_{,} . p_{,,} \left(= \frac{b^2 (a^4 - c^2 x_{,}^2)}{a^4 - c^2 x_{,}^2} \right) = b^2$.

Dunque Bt : F$'t'$: : Ft'' : At'''.

§. 395. L'eq. di una retta che passa per un fuoco, le cui coordinate $y = 0$, $x = \pm \sqrt{a^2 - b^2}$; è (334) $y = m(x \pm \sqrt{a^2 - b^2})$ Facendo $m = -\frac{1}{a'}$ essa diviene perpendicolare alla tangente $y = a'x + \sqrt{(a^2 a'^2 + b^2)}$: supponendole coesistenti si ottiene il punto d'incontro, e sommando i quadrati

$$\left\{a'y + x = \mp \sqrt{a^2 - b^2}\right\}^2, \left\{y - a'x = \sqrt{a^2 a'^2 + b^2}\right\}^2$$

si ha $(y^2 + x^2)(1 + a'^2) = a^2 (1 + a'^2)$ ossia $y^2 + x^2 = a^2$. eq. del circolo, indipendente da a', cioè dalla posizione della tangente, che ci riconduce al teor. del §. 389 n.° 4.°

§. 396 Il contatto essendo al solito $(x_{,}, y_{,})$, la perpendicolare dal centro sulla tangente è $p = -\frac{b}{\sqrt{1 + a^2}}$, cioè, sostituendo il valore di a e di b, come si è fatto nel §. 394,

$p = \frac{a^2 b}{\sqrt{[a^4 - c^2 x_{,}^2]}}$; ma la normale in $(x_{,}, y_{,})$ è (§. cit.) $= \frac{b}{a} \sqrt{[a^4 - c^2 x_{,}^2]}$: dunque:

Teor. 1.° *Se si moltiplica la perpendicolare tirata dal centro sulla tangente in un punto* $(x_{,}, y_{,})$ *del perimetro ellittico, per la normale compresa fra il predetto punto ed il 1.° asse, si ha un rettangolo* $= b^2$.

Il rettangolo di cui sopra è $= a^2$ quando la normale s' immagina prolungata sino al 2.° asse, perchè (§. cit.) (F.ª 95) si ha $MN' = \frac{1}{b}\sqrt{a^4 - c^2 x_{,}^2}$.

Teor. 2.° *Le perpendicolari dal centro su due tangenti stanno in ragione reciproca delle normali ai respettivi contatti.*

§. 397 L'eq. di una corda AL[F.ª 98], A essendo l' estremo del 1.° asse (e se vuolsi, anche di un diametro) le cui coordinate sono $y_{,}=0, x_{,}=-a$, è (334) $y_{,}=m(x_{,}+a)$; quella di BL, a motivo che in B si ha $y_{,}=0$, $x_{,}=a$, è $y_{,}=m_{,}(x_{,}-a)$.

Il comune incontro L nel perimetro ellittico esige che l' una e l' altra eq. e però anche il loro prodotto, coesistano con quella della ellisse. Dunque

$$mm_{,}(x_{,}^2-a^2)(=y_{,}^2)=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_{,}^2), \text{ cioè } mm_{,}=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Viceversa se $mm_{,}=-\frac{b^2}{a^2}$ le rette espresse con l' eq.ⁱ $y=m(x+a)$, $y=m_{,}(x-a)$ sono corde ellittiche *supplementarie.*

Supponendo che il diametro su cui le anzidette corde insistono sia il 1.° asse ACB (F.ª 99) si ha $tan.CAD=\frac{b}{a}$: ma (224)

$sen.\,\theta = \frac{2\,tan.\,{}^{1}/_{2}\,\theta}{1 + tan.^{2}\,{}^{1}/_{2}\theta}$ (*) dunque $sen.\,DAE = \frac{2b}{a} : (1 + \frac{b^{2}}{a^{2}}) = \frac{2ab}{a^{2} + b^{2}}$

e perchè le formole (g') (372) quando $b_{,} = a_{,}$ danno $sen.\,NCO' \,(= \frac{ab}{a_{,}^{2}}) = \frac{2\,ab}{a^{2} + b^{2}}$, ne segue che i diametri coniugati eguali NN', OO', sieno paralleli alle respettive corde BD, AD.

La grandezza de' predetti diametri si ha dalla 1.ª delle (g'), $= \sqrt{{}^{1}/_{2}\,(a^{2} + b^{2})}$.

Le coordinate del punto N sono

$x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{2}}$, tali essendo i valori provenienti dall' eq.ⁱ

$${}^{1}/_{2}\,(a^{2} + b^{2})\,(= \overline{CN}^{2}) = x^{2} + y^{2};\; y^{2} = b^{2} - \frac{b^{2}}{a^{2}}\,x^{2}.$$

Notisi che l' eq. $y^{2} = \frac{b_{,}^{2}}{a_{,}^{2}}\,(a_{,}^{2} - x_{,}^{2})$ quando $b_{,} = a_{,}$ non differisce da quella del circolo.

§. 398 Condotta la tangente all' estremo N' del diametro N'N (F.ª 99) sia T' la sua intersezione con AB, ed OO' il diametro coniugato. I trigoni ortogonali e simili, COQ, N'P'T' danno N'P' : OQ : : P'T' : CQ ($=z$); quindi (387)

$$BP'.AP' : BQ.AQ\;(: : \overline{N'P'}^{2} : \overline{OQ}^{2}) : : \overline{P'T'}^{2} : \overline{CQ}^{2};$$

e sostituendo (391) $\frac{a^{2} - x^{2}}{x}$ per P'T', dove $x = CP'$,

$$a^{2} - x^{2} : a^{2} - z^{2} : : (\frac{a^{2} - x^{2}}{x})^{2} : z^{2},\ \text{cioè}\ a^{2} - z^{2}\,(= AQ.BQ) = x^{2}.$$

(*) Infatti $sen.\,\theta = 2cos.^{2}\,{}^{1}/_{2}\theta\; tan.\,{}^{1}/_{2}\theta$, e [220] $cos. = \frac{1}{\sqrt{(1 + tan.^{2})}}$.

Avvertasi che dalla proporzione

$$AQ . BQ (=x^2): \overline{OQ}^2 :: a^2 : b^2$$

deriva $\overline{OQ}^2 = \frac{b^2}{a^2} . x^2$ e si concluderà che sussiste il seg.

Teor. $\overline{CO}^2 [= z^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2) = a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2} x^2 = (a - \frac{cx}{a})(a + \frac{cx}{a})] = FN . F'N'$.

§. 399. Inscrivendo (F.ª 100.) in una certa ellisse BDA (=E) una serie di trapezj eguali, contigui e di estrema sottigliezza, tr' (=t), $t'r''$ (=t'), ec., e prolungando i lati paralleli sino alla circonferenza del circolo circoscritto BRA (=C), le rette rr', $r'r''$, ec. RR', R'R'' ec., coincidono (367) col respettivo arco ellittico e circolare e si ha (387)

$$tr : tR :: b : a ; \; t'r' : t'R' :: b : a ; \text{ ec. quindi}$$

$$tr + t'r' : tR + t'R' \text{ ossia } t : T :: b : a .$$

Proseguendo si trova $t' : T' :: t'' : T''$ ec. $:: b : a$:

Dunque $t + t' + t''$ ec. (=E) : T + T' + T'' ec. (=C) $:: b : a$;

$$E = C \frac{b}{a} (= \pi a^2 . \frac{b}{a}) = \pi ab :$$

e se $2a_1$, $2b_1$ sono gli assi di un'altra ellisse E_1, risulta $E : E_1 :: ab : a_1 b_1$, il che significa:

Teor. *Che le superficie di due ellissi stanno fra loro come i rettangoli costruiti su i respettivi loro assi*.

Chiamando c il circolo inscritto ad E si ha $E : c :: a : b$; ma $E : C :: b : a$: dunque $E = \sqrt{c . C} = c_1$,

cir. med. geom. fra c e C, il cui raggio $r=\sqrt{ab}$ perchè $b^2:r^2:a^2$.

§. 400. Probl. 1.º Si hanno due aste $xx_{,}$, $yy_{,}$ (F.ª 101) di metallo levigatissimo, che stabilmente s' intersecano ad angolo retto in A, dov'è scavato nella grossezza del metallo un parallelepipedo rettangolo, i lati della cui base sono eguali alla larghezza delle aste. La DE è un' asta impernata in B, C, su due piccole fasce di metallo, che delicatamente abbracciano le aste Ay, $Ax_{,}$; in $x, y, x_{,}, y_{,}$, evvi una punta di ferro per cui la macchina si stabilisce su di una tavola piana, ed in M vi è un ago che porta una punta di lapis, destinata a radere leggiermente la tavola mentre la DE scivola da y verso A e da A verso $x_{,}$, e vicev. Si dimanda l'eq. della curva descritta dal punto M.
Soluz.ne. Sia BC$=\alpha$, CM$=\beta$, MP (parall. ad Ay) $=y$, AP$=x$, BP$=z$.
Dal trigono BMP si ha $y^2+z^2=(\alpha+\beta)^2$...(1): ma MB:MC::$z:x$ cioè $z=\dfrac{(\alpha+\beta)}{\beta}x$: dunque

$$\beta^2y^2+(\alpha+\beta)^2x^2=(\alpha+\beta)^2\beta^2$$

eq. ellittica che si riduce alla solita forma facendo $\alpha+\beta=a$ e $\beta=b$.

Qualora le aste $xx_{,}$, $yy_{,}$, s'incontrino sotto l'angolo θ la MP si conduce parallela ad Ay, l'eq. (1) si cangia in

$$y^2+z^2-2yz\cos.\theta=(\alpha+\beta)^2.$$

e si ha l'eq. finale ellittica anch'essa, sotto la forma

$$\beta^2 y^2 + (\alpha+\beta)^2 x^2 - 2(\alpha+\beta)\beta \cos.\theta . xy = (\alpha+\beta)^2 \beta^2$$

Per soddisfare all' ipot. che il punto M cada sulla BC basta sostituire $-\beta$ a β.

La macchina sopra indicata, quando si tratta di descrivere un' ellisse di mediocre grandezza, offre un meccanisco più facile e più sicuro di quello esposto (389. n.° 3.°) perchè non deesi temere l' aberrazione proveniente dal variabile distendimento del filo.

Nell' ipot. d' $x\hat{A}y = 100.°$ è un corollario del meccanismo sopra indicato il seg.

Teor. *Che tirando da un punto* H (F.ª 95) *sul prolungamento del* 1.° *asse* AB, *una trasversale* HLI *in guisa che il semmento esterno* HL *sia* =CD, *risulta* LI=AB.

§. 401. Probl. 2.° I lati di un angolo retto si muovono scivolando sul perimetro di una data ellisse: qual è la curva generata dal vertice? Soluz.ne Sieno (391)

$$y = a'x + \sqrt{(a^2 a'^2 + b^2)} \dots (1)$$

$$y = a''x + \sqrt{(a^2 a''^2 + b^2)} \dots$$

le respettive eq.i di due tangenti ellittiche. Se $a'' = -\frac{1}{a'}$ esse sono rettangole fra loro; l' eq. della 2.ª diviene

$$a'y = -x + \sqrt{(a^2 + b^2 a'^2)} \text{ e dà } (a'y + x)^2 = a^2 + b^2 a'^2.$$

Dall' eq.(1) risulta $(y - a'x)^2 = a^2 a'^2 + b^2$.

Si sommi l'una con l'altra e si avrà $y^2 + x^2 = a^2 + b^2$, cioè un circolo concentrico all'ellisse, il cui raggio $= \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

§. 402. Probl. 3.° È dato un trigono ABD (F.ª 102) e vi si vuole inscrivere un'ellisse il cui centro sia nella trasversale che passi per un vertice e bipartisca il lato opposto. Soluz.ne Sia la trasversale $NB = h$, $AD = 2a$, OO' il diametro coniugato ad NN' $(= 2a_,)$, C il centro, $CP = t$, PM, parallela a CO, $= u$, e si avrà

$$\frac{u}{h-a_,-t} \left(= \frac{PM}{PB}\right) = \frac{a}{h} \left(= \frac{ND}{NB}\right)$$

$$h-a_,-t = \frac{a_,^2 - t^2}{t} \;[= PT = \text{sottang.}\,(391)\,].$$

Sussistono pertanto le tre eq.ⁱ

$$a_,^2 u^2 + b_,^2 t^2 = a_,^2 b_,^2 \ldots (1),\; u = \frac{a}{h}(h-a_,-t) \ldots (2)$$

$t = \frac{a_,^2}{h-a_,} \ldots (3)$ fra le incognite $a_,$, $b_,$, t, u, ed eliminando le due ultime resta un'eq. affetta da $a_,$ e $b_,$, che dimostra il probl. indeterminato. Può dunque aggiungersi una nuova condizione, per es.° che il contatto M sia nel mezzo della BD. In tal caso risulta

$t = \tfrac{1}{2} h - a_, = \frac{a_,^2}{h-a_,}$, $a_, = \tfrac{1}{3} h$, e dall'eq. (2), posto $\tfrac{1}{2} h - a_,$ per t, si deduce $u = \tfrac{1}{2} a$. Si sostituisca in (1) $\tfrac{1}{2} a$ per u, $\tfrac{1}{3} h$ per $a_,$ e si avrà $b_, = \frac{a}{\sqrt{3}} = CO$, media geometrica fra $\tfrac{1}{3} a$ e $\tfrac{1}{3} a$.

§. 403. Probl. 4.° Condotto in una data ellisse ADBA (F.ª 103) un indefinito n.° di corde de, $d'e'$, ec. perpendicolari al 1.° asse AB, si dimanda il luogo geometrico de' punti m, m'; ec. determinati dal respettivo incontro delle rette Bd, eA; Bd', e'A; ec. Soluz.ne Sieno $x_{,}$, $y_{,}$ le coordinate del punto d. La retta Ae ha per eq. $y = -mx - n$, e perchè passa per li punti $(x_{,}, y_{,})$, (o, a), sussistono le due seg.

$$y_{,} = -mx_{,} - n\ ,\ o = -ma - n\ ,$$

dunque $m = \frac{y}{x_{,} - a}$, $n = \frac{ay_{,}}{x_{,} - a}$, e la definitiva eq. di Ae si riduce

ad $$y = \frac{y_{,}}{a - x_{,}}(x + a).$$

Cangiando il segno di a e d'$y_{,}$ essa diviene

$$y = \frac{y_{,}}{a + x_{,}}(x - a)$$

ed appartiene alla Bd. Si moltiplichino fra loro le due prec. eq.ⁱ e sostituendo $\frac{b^2}{a^2}$ ad $\frac{y_{,}^2}{a^2 - x_{,}^2}$ si avrà $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ eq. iperb.ca (370 sul fine)

Dell' Iperbola

§. 404 Quando N < o l'eq. My^2 + Nx^2 = Q prende la forma $y^2 = \frac{N}{M}(x^2 \mp \frac{Q}{N})$. Prescindia-

mo dal segno inferiore poichè permutando le coordinate si ottiene $x^2=\frac{M}{N}(y^2-\frac{Q}{M})$, eq. della forma da noi adottata.

Ragionando come al §. 386 si ottiene

$$b_{,}=\sqrt{-\frac{Q}{M}}\ ,\ a_{,}=\sqrt{\frac{Q}{N}};\ a_{,}^2=\frac{Q}{M}\ ,\ b_{,}^2=\frac{Q}{N}\ ,\text{e però}$$

$$a_{,}^2y^2-b_{,}^2x^2=a_{,}^2b_{,}^2\ \text{ossia}\ y^2=\frac{b_{,}^2}{a_{,}^2}(x^2-a_{,}^2)\ldots(B)$$

Quando $x\hat{.}y=\frac{1}{2}\pi$ i semidiametri $a_{,}$, $b_{,}$, si cangiano negli assi CB, DC (F.ª 104) che diciamo a, b. L' eq. $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$ dimostra che niun punto della curva corrisponde ad AB, perchè in qualsivoglia punto di questo 1.° asse si ha $\pm x<\pm a$.

Se $b=a$, e però [370] $4AC-B^2=4A^2$, C=A, B=0(371), l' iperbola dicesi *equilatera*, ed è fra le iperbole ciò che il circolo fra le ellissi

Si considera l' asse coniugato $2b$, quantunque immaginario per conservare l' analogia fra l' eq.ⁱ ellittica ed iperbolica.

§. 405. Instituendo come (388) la proporzione $a:b:y_{,}$ si ha $\frac{b^2}{a^2}=\frac{y_{,}}{a}$. Sia c l' ascissa dell' ordinata $y_{,}$ [$=\frac{1}{2}p$], onde $p=\frac{2}{a}[c^2-a^2]$, cioè $\frac{1}{2}ap=c^2-a^2$, e perchè $\frac{1}{2}ap=b^2$, risulta b media geometrica fra $c+a$ [= BF], $c-a$ [= AF], e si costruisce descrivendo un arco col centro in A ed il raggio AD [= CF] $=c$. I punti D,E

dov'esso taglia l' indefinita $yy_{,}$, perpendicolare in C ad AB, determinano

$CD=CE=\sqrt{[\overline{AD}^2-\overline{AC}^2]}=\sqrt{[c^2-a^2]}=b^2$. Dati gli assi si ha $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

§. 406. Calcolando FM, ipotenusa del trigono FMP, si ottiene

$FM=\sqrt{[\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2+(\sqrt{a^2+b^2}-x)^2]}=\frac{cx}{a}-a$. Così

$F'M=\frac{cx}{a}+a$ e perciò $F'M-FM=2a$.

Abbiasi una riga F'M' $(=\delta)$ mobile intorno ad F', e preso un filo $(=\delta-2a)$ se ne adatti un capo in M', l' altro in F.

Siccome

$F'M'-\overline{FMM'}=\delta-[\delta-2a]=2a=F'M-FM$, la punta di un ago che tenda il filo ed obblighi la riga ad inclinarsi verso BA, descrive un arco iperbolico.

Una semplice costruzione di alcuni punti è talvolta preferibile. Descritto un arco col centro F ed un raggio arbitrario AG, indi un altro col centro F' ed il raggio BG, la doppia intersezione M ; m dà due punti della curva.

Presa sulla MF' [F.ª 104] la $Mf=MF$ si bisechi la fF in g e la gM sarà tangente M. Infatti per qualunque altro punto n si ha $F'n-fn$ $[=F'n-Fn]<F'f<2a$: ma

$g\hat{M}F = g\hat{M}f = T'\hat{M}M'$; dunque qualunque raggio M'M, luminoso o sonoro, diretto al punto F', si riflette in F, e tal proprietà compete a tutta la superficie generata dalla rivoluzione dell' arco AMI intorno ad Ax: quindi i punti F, F' diconsi *fuochi*; FM, F'M, *raggi vettori*.

Ogni raggio SM tendente in F si riflette dunque verso F', ed una pupilla situata nella direzione MS vede in F il punto luminoso F'.

La retta CF[$= CF' = \sqrt{a^2 + b^2} = c$] dicesi *eccentricità*: la doppia ordinata ortogonale 2FG è il *parametro* p e si ha $2a : 2b : p$.

§. 407. Un calcolo simile a quello del §. 391 dà l' eq. della tang. sotto la forma

$$y - y_{,} = \frac{b^2 x_{,}}{a^2 y_{,}} [x - x_{,}] \text{ ossia } y = \frac{b^2 x_{,}}{a^2 y_{,}} x - \frac{b^2}{y_{,}} \quad \ldots. [1]$$

come pure $y = a'x + \sqrt{[a^2 a'^2 - b^2]}$.

Quella della normale MN è per conseguenza

$$y - y_{,} = -\frac{a^2 y_{,}}{b^2 x_{,}} [x - x_{,}] \text{ ossia } y = -\frac{a^2 y_{,}}{b^2 x_{,}} x + \frac{c^2}{b^2} y_{,} \ldots [2]$$

Basta fare $y = 0$ nell' eq.^{i} [1], [2] per ottenere

$$x[=CT] = \frac{a^2}{x_{,}},\ PT[=CP-CT] = \frac{x_{,}^2 - a^2}{x_{,}} [\text{sottang.}].$$

$$x[=CN] = \frac{[a^2 + b^2]}{a^2} x_{,},\ PN[=CN-CP] = \frac{b^2 x_{,}}{a^2} [\text{sunnorm.}] [*]$$

(*) Questa espressione coincide nella forma con quella relativa all' ellisse. È dunque soggetta ad equivoco la regola per cui vuolsi che basti cangiare b^2 in $-b^2$ per adattare all' iperbola le formole spettanti all' ellisse.

Quindi $MN=\frac{b}{a^2}\sqrt{c^2x^2-a^4}$.

§. 408 Si ha la tangente in un dato punto M [F.ª 105] conducendo BN parallela al diametro CM, ed una retta per M parallelamente ad AN è quella che si richiede. Infatti CME biseca AN e tutte le corde ad essa parallele: ma TMT' è limite delle corde parallele ad AN; dunque ec.

Se il punto assegnato è T' (F.ª 106) esterno al perimetro, si descriva un arco il cui centro T', il raggio T'F, un altro col centro F' ed il raggio $2a$: la trasversale per F' ed I, incontro degli archi, taglia l' iperbola nel contatto M, e T'M è la tang. Basta osservare che risulta IM=FM, e che $\hat{IMF}$ è bisecato dalla TMT'.

§. 409. Ripetendo il calcolo de' §§. 393, 394, 397 si trova (F.ª 107)

$$Bt.Ah=p_{,}.p_{,,}=-b^2 \quad \text{ed} \quad mm'=\frac{b^2}{a^2}.$$

L' analisi del §. 395 dimostra che i punti in cui qualsivoglia tangente è incontrata dalle perpendicolari ad essa condotte dai fuochi, sono nella circonferenza del circolo descritto sul 1.° asse come diametro. Ragionando come nel §. 396 si vede che i due teoremi del cit. §. si riferiscono anche all' iperbola.

§. 410. L' ipot. $x_{,}=\infty$ in $a-\frac{a^2}{x_{,}}$, espressione di AT (=AC−CT) dà AT=a: dunque se

si suppone il contatto ad un' infinita distanza dal vertice, la tangente, che indichiamo per CV e dicesi *assintoto*, passa pel centro: per determinare $A\hat{C}V$ sia An perpendicolare in A: nella proporzione

$$AT\left(=\frac{ax_{,}-a^2}{x_{,}}\right):PT\left(=\frac{x_{,}^2-a^2}{x_{,}}\right)::Ah:PM\left(=\frac{b}{a}\sqrt{x_{,}^2-a^2}\right)$$

si faccia $x_{,}=\infty$ e si scuoprirà che Ah degenera in An ed è $=b$: quindi $tan.\,A\hat{C}V=\frac{b}{a}$ e l'eq. degli assintoti CV, CV', è $y=\pm\frac{b}{a}x$.

§. 411. Per riferire l' iperbola agli assintoti sia $Cn=t$, Mn (parallela a CV') $=u$: Siccome $t.\hat{x}=-u.\hat{x}$, si ha

$$sen.t.\hat{x}\,(=-sen.u.\hat{x})=\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

$$cos.t.\hat{x}\,(=cos.\,u.\hat{x})=\frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$$

e le note formole ... I (369)

$$x=t\,cos.\,t.\hat{x}+u\,cos.u.\hat{x};\quad y=t\,sen.t.\hat{x}+u\,sen.\,u.\hat{x}$$

divengono $\quad x=\frac{a(t+u)}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ y=\frac{b(t-u)}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$.

Pongasi $\frac{1}{4}(a^2+b^2)\ [=(\frac{1}{2}Cl)^2]=\omega^2$, e sostituendo la respettiva espressione d' x, y in $a^2y^2-b^2x^2=-a^2b^2$ si avrà $tu=\omega^2$ eq. richiesta. Essa può ridursi fra gli elementi

$Mm(=t)$, $Mm'(=u')$, $V\hat{C}V'(=\theta)$, $C\hat{m}m'(=\theta')$ ricavando

$$t=\frac{sen.(\theta+\theta')}{sen.\theta}u', \quad u=\frac{sen.\theta}{sen.\theta'}t'.$$

Trasportando l' origine in l, punto medio della Cn, e facendo $Cl=1$ la $tu=\omega^2$ si cangia in

$u=\frac{1}{1+t}$ è dimostra essere t, u, quantità inverse, i cui respettivi limiti sono ∞, 0.

Condotta AE parallela a DV i trigoni ClA, $Cl'A$ sono isosceli, $Al=Al'$, $AlCl'$ è lozanga e si ha

$\omega^2[=Cl.Al'=(Cl)^2]=(Al)^2$ (*potenza* dell'iperb.)

Quando $b=a$ la lozanga diviene un quadrato e $tu=\frac{1}{4}a^2$.

Moltiplicando $tu=\omega^2$ per *sen.* VCV' si ha *rom.*$MpCi$=*rom.*$AlCl'$, e *loz.*ADBE=4*loz.*$AlCl'$.

§. 412. Si concepiscano le trasversali Nn, Qq (F.ª 108.) perpendicolari al 1.° asse CA, che incontrino gli assintoti in n, q; N, Q; l'iperbola in M, R, m. Siccome

$$PQ=\frac{b}{a}x, QR\ (=PQ-PR)=\frac{b}{a}(x-\sqrt{x^2-a^2}),$$

$$Rq=\frac{b}{a}(x+\sqrt{x^2-a^2}),\ \text{risulta}$$

$$QR.Rq[=\frac{b^2}{a^2}(x^2-(x^2-a^2))=b^2:$$

Nella stessa guisa ottiensi $MN.Mn=b^2$: d'altronde $QR.Rq=qm.mQ$: dunque $qm.mQ=MN.Mn$. Una 3.ª trasversale $FMmG$ dà

$mQ : MN :: mF : MF$; $Mn : mq :: MG : mG$;

e perchè si è trovato $mQ : MN :: Mn : mq$, risulta

$$mF : MF :: MG : mG; \text{ quindi}$$

$$mF - MF (= Mm) : MF :: MG - mG (= Mm) : mG,$$

cioè $MF = mG$. Perciò, trasportando parallelamente la FG finchè divenga tangente in e, si ha $es = er$.

La tangente prolungata sino agli assintoti è dunque bipartita nel contatto.

Dati gli assintoti si determina la direzione di CA bisecando $V\hat{C}V'$; e siccome (410) $a = b \cot. ACV$, e dall'eq. $u^2 = \tan.^2 ACV t_{,}^2 - b^2$ si deduce $b = \sqrt{[\tan.^2 ACV t_{,}^2 - u_{,}^2]}$, basta un punto iperbolico $(t_{,}, u_{,})$ per calcolarne gli assi. Con tali principj soddisfassi al seg.

Probl. *Descrivere un'iperbola che passi per un punto dato ed abbia per assintoti i lati di un dato angolo* (*)

§. 413. Sia $tu = \omega^2$ l'eq. di una data iperbola IMi (F.ª 109) ed $u - u_{,} = \mu(t - t_{,})$ l'eq. della segante SMs condotta per M $(t_{,}, u_{,})$. Eliminando $t_{,}$, $u_{,}$ fra la prec. e $t_{,} u_{,} = \omega^2$ si ottiene $u_{,}^2 + (\mu t - u) u_{,} = \mu t u$ cioè $u_{,} = \frac{1}{2}\{u - \mu t \pm (\mu t + u)\}$, e la SM$s$ cade sulla tangente se $\mu t + u = 0$ e vicev.: ma in M si ha $t = t_{,} (= CP)$, $u = u_{,} (= MP)$: dunque $\mu = -\frac{u_{,}}{t_{,}}$.

(*) Questo probl. è contemplato da *Pappo* (Lib. VII. Probl. XV.) e da *Apollonio* nelle Sez. Con.

Per condurre la tangente in M prendasi PT = CP (= $t_{\prime}$) e si congiunga T con M. Infatti, siccome la Mp, parallela a CV, è=CP=PT, i trigoni MpT', MPT provengono eguali e si ha MT = MT'.

§. 414. Sostituendo l' espressione di $sen.\, \hat{t.x}$ (= $sen.\, ^1/_2\, \theta$) e di $cos.\, \hat{t.x}$ (411) si ritrae

$$cos.\,\theta \Big\} = cos\,(^1/_2\theta + {}^1/_2\theta) = cos.^2\, {}^1/_2\theta - sen.^2\, {}^1/_2\theta) \Big\} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2};$$

Si ha inoltre (§. cit.) $4\, t_{\prime} u_{\prime} = a^2 + b^2$, e (F.ª prec.)

$$\overline{CM}^2 = t_{\prime}^2 + u_{\prime}^2 \pm 2\, t_{\prime} u_{\prime} cos.\theta\,,\; \overline{MT}^2 = t_{\prime}^2 + u_{\prime}^2 \mp 2 t_{\prime} u_{\prime} cos.\theta:$$

$$\text{Dunque } \overline{CM}^2 - \overline{MT}^2 (= 4 t_{\prime} u_{\prime} cos.\theta) = a^2 - b^2;$$

eq. che coincide con la 1.ª delle (g') (372) e dimostra essere MT (=MT') il semidiametro $b_{\prime}$ coniugato di CM (=$a_{\prime}$) nell'eq. $u^2 = \frac{b_{\prime}^2}{a_{\prime}^2}(t^2 - a_{\prime}^2)$ analoga all'eq. (B) del §. 404., e così resta subito provato un teor. elegante, cioè: Che essendo N N' una corda parallela a TM sta

$$\overline{NP'}^2 : (2\,CM + MP')\,MP :: \overline{MT}^2 : \overline{CM}^2.$$

Dato un diametro è dunque facile assegnarne il coniugato.

Accenniamo per incidenza che diconsi coniugate per rapporto a due date iperbole IAI', iBi (F.ª 107) le due iperbole opposte le quali abbiano per 1.° asse DE per 2.° asse AB.

§. 415. Probl. 1.° Si dimanda il luogo geometrico de' punti a, tali, che am, am', (F.ª 110), perpendicolari ai lati cb, cx, di un dato angolo xcb, diano $cmam' = a^2$. Soluz.^{ne} Sieno $x_{,}, y_{,}$ le coordinate di m; $x_{,,}, y_{,,}$ quelle di a, e rappresentando la retta cb con l' eq $y_{,} = mx_{,}$ si avrà $y_{,} - y_{,,} = -\frac{1}{m}(x_{,} - x_{,,})$ per esprimere la posizione della am. Dall' una e dall' altra eq. risulta

$$x_{,} = \frac{x_{,,} + my_{,,}}{1+m^2},\ y_{,} = \frac{m^2 y_{,,} + mx_{,,}}{1+m^2}:$$

la sostituzione

$$(337) \text{ in } S = \tfrac{1}{2}(x_{,,} y_{,} - x_{,} y_{,,}) \ (= \text{trig. } cam)$$

dà $$S = \frac{x_{,,}(m^2 y_{,,} + mx_{,,}) - y_{,,}(x_{,,} + my_{,,})}{2(1+m^2)}:$$

la prec. funzione, accresciuta di $\tfrac{1}{2}x_{,,}y_{,,}$ ($=$ trig. $acm_{,}$) facciasi $= a^2$ e si avrà

$$y^2_{,,} \mp 2m x_{,,} y_{,,} - x_{,,}^2 \pm 2a^2 \frac{(1+m^2)}{m} = 0$$

eq. dell' iperbola, dove il segno inferiore corrisponde a $bcx > \tfrac{1}{2}\pi$.

§. 415 Probl. 2.° Sono dati due circoli e vuolsi il luogo geometrico in cui esiste il centro di tutti quelli che insieme toccano l' uno e l'altro circolo dato Soluz.^{ne} I circoli proposti essendo $\alpha a a'$, $\beta b b'$ (F.ª 111), i centri f, F, il respettivo raggio r, r', ed $f\text{F} = \delta$, suppongasi M uno de' punti richiesti; si descriva il trigono fMF,

e posta l'origine in f sieno f P $(=x)$, MP$(=y)$, le coordinate ortogonali del punto M, e chiamando R il raggio ignoto aM $(=b$M$)$ si deduca

$$(r+R)^2=y^2+x^2\ldots(1);\ (r'+R)^2=y^2+(\delta-x)^2$$

Tolta la 2.ª dalla 1.ª si ha

$$r^2-r'^2+2R(r-r')=2\delta x-\delta^2:$$

quindi

$$R=\frac{2\delta x+r^2-r'^2-\delta^2}{2(r-r')}\left(=\frac{2\delta x-k}{\lambda}\right)$$ e l'eq. (1) diviene

$$\lambda^2y^2+(\lambda^2-4\delta^2)x^2-4\delta(\lambda r-k)x=\lambda^2r^2-2k\lambda r+k^2,$$

eq. dell'iperbola perchè $\delta>r-r'$ dà $4\delta^2>\lambda^2$.
Fatto $y=0$ si ha $x(=$FA$)=\tfrac{1}{2}\{\delta\pm(r-r')\}$,

e presa CA=CB$=\tfrac{1}{2}(r-r')$ è AB$(=r-r')$ il 1.° asse.
Quando $r=r'$ risulta $x=\tfrac{1}{2}\delta$, ed il luogo richiesto è la retta perpendicolare in C ad fF.

Partendo dall' ipot, che i circoli richiesti abbraccino i circoli dati si trova un' altra iperbola M'BB'.

§. 417. Probl. 3.° Qual è la linea descritta dal vertice di un angolo retto, i cui lati scivolano sul perimetro di una iperbola? Soluz. Coi principi del §. 401 si trova $y^2+x^2=a^2-b^2$, eq. del circolo il cui raggio $=\sqrt{(a^2-b^2)}$, e che suppone $a>b$.

§. 418, Probl. 4.° Data una retta AB$=2a$ (F.ª 112) una perpendicolare mobile PV, ed in essa un punto M, tale che sia AMB un massimo, trovare il luogo geometrico a cui il

punto M dee successivamente corrispondere.
Soluz.[ne] Supponendo la PV in una determinata posizione, onde $AP = x_{,}$, è chiaro che si ha il punto M descrivendo un circolo che passi per A, B e tocchi la PV. La ragione si è che congiungendo A, B con un altro punto m della PV, il vertice di $A\hat{m}B$ oltrepassa il circolo ed ha per misura la metà dell'arco concavo meno quella del convesso. Ma (Geom.) PA : PM : PB cioè $y^2 = (2a + x)x$: Dunque il luogo di cui si tratta è l' iperbola equilatera il cui 1.° asse AB. A misura che AP diminuisce il punto M si abbassa: quando $x = o$, M cade in A, ma se x ulteriormente diminuisce, il punto M scorre lungo AB, poichè in tal guisa l'angolo richiesto risulta $= \pi$. *Misto* dunque e *discontinuo* è il luogo geometrico soddisfacente al probl., cioè la retta AB e ciascuna delle iperbole equilatere corrispondenti MAM', NAN'.

Della Parabola

§. 410, L' eq. $y^2 = px$ mostra che la curva passa per l' origine A (F.ª 113), che i quadrati delle ordinate MP stanno come le ascisse AP, e PM = PM'.

Per appurare il significato geometrico del coefficiente p, giacchè y^2 esprime una superficie, si rappresenti $\frac{1}{4}p$ con un' ordinata rettangola FG, la cui ascissa AF sia c, e siccome risulta $\frac{1}{4}p^2 = pc$, ossia $p = 4c$, si conclude-

rà che $\frac{1}{4}p$ è fra le ordinate paraboliche quella che uguaglia il doppio dell' ascissa.

§. 420 Per far sì che la distanza fra 'l punto M (x, y) ed un punto interno μ

$$\text{cioè} \qquad \delta = \sqrt{\left\{(x-x_{,})^2 + (\sqrt{px}-y_{,})^2\right\}}$$

sia razionale, fa d' uopo supporre $y_{,}=0$ ed $x^2+(p-2x_{,})\,x+x_{,}^2$ un quadrato, cioè $x_{,}^2=\frac{1}{4}(p-2x_{,})^2$ ossia $x_{,}=\frac{1}{4}p$. Dunque μ esiste nell' asse Ax, è distante dal vertice della quantità AF $=c$, e si ha

$$\delta\{=\text{FM}=\sqrt{[(x-\tfrac{1}{4}p)^2+px]}\}=x+\tfrac{1}{4}p.$$

Sul prolungamento di Ax prendasi AB=AF; per B si tiri la DD′, per M la ML perpendicolare a DD′ come questa ad Ax, e si avrà

$$\text{ML}=\text{BF}+\text{FP}=\text{AF}+\text{AP}=\tfrac{1}{4}p+x=\text{FM}.$$

La DD′ è la *direttrice* della parabola: il trigono FML è isoscele. Nel punto F′ di una squadra BLF′ si fermi un filo $=$LF′; l' altro capo sia in F, e la punta di un ago che applichi il filo sul braccio F′L mentre l'altro BL scorre lungo la BD′, segna sul piano xBD′ una parabola, la cui ampiezza dipende dalla BF.

Sia E il punto medio di FL, si conduca la T′MET; da un suo punto m si tirino mF, mL, indi mI perpendicolare a BD′. Siccome mF $(=m$L$)>m$I si vede che m cade fuori della parabola, e perciò che T′MT è tangente

in M. Ma $F\hat{M}E = E\hat{M}L = F'MT'$: dunque qualunque raggio F'M parallelo ad Ax si riflette in F, che perciò dicesi *fuoco*; punto il cui uso catottrico e stentorofonico, si rende interessante, se abbiasi uno specchio generato dalla rivoluzione di una semiparabola A M S intorno all'asse Ax. Il celebre *fotoforo* che dal faro di Alessandria additava ai naviganti l'imboccatura di quel porto, era un'insigne applicazione dell'esposto principio.

Per tirare la tangente da un punto esterno m' (F.ª 114) si descriva un circolo col centro in m' ed il raggio $m'F$; per L dove incontra BD' conducasi la parallela ad Ax, e l'intersezione di essa e della parabola determinerà il contatto M. Infatti si è veduto essere ML=MF; d'altronde $m'L = m'F$ per costruzione: dunque $m'\hat{M}L = m'\hat{M}F$; e perchè $m'\hat{M}L = m\hat{M}F'$ risulta $m'\hat{M}F = m\hat{M}F'$.

§. 421. Cangiando $z = \pm \dfrac{b^2}{a \mp c \cos. \hat{a.z}}$ (390) in

$z = \dfrac{2ad - d^2}{a \pm (a-d) \cos. \hat{a.z}}$, purchè facciasi $a = \infty$,

si ha l'eq. polare $z = \dfrac{2d}{1 \pm \cos. \hat{a.z}}$.

§. 422 La eliminazione d'y fra $y^2 = px$ ed $y - y_{,} = m(x - x_{,})$

dà $y_{,}^2 + 2my_{,}(x - x_{,}) + m^2(x - x_{,})^2 = px$:

quindi

$$x=\frac{1}{m^2}\left\{m^2x_,-my_,+{}^1\!/_2p\pm\sqrt{(m^2p\,x_,-m\,p\,y_,+{}^1\!/_4p^2)}\right\}$$

e la trasversale diviene tangente se

$$m^2x_,-my_,+{}^1\!/_4p=0\,,\; m=\frac{1}{2x_,}\left\{y_,\pm\sqrt{y_,^2-px_,}\right\},$$

valore che si riduce ad $m=\frac{y_,}{2x_,}$ quando il punto dato è nel perimetro della parabola.

Dunque l'eq. della retta che tocca la parabola nel punto $(x_,, y_,)$, è

$$\text{I}\ldots\; y-y_,=\frac{y_,}{2x_,}(x-x_,)\ \text{ossia}\ y=\frac{y_,}{2x_,}x+{}^1\!/_2y_,\,;$$

e per trasformarla in $y=mx+\frac{p}{4m}$, eq. analoga all'eq. (4) del §. 391, basta rappresentare la tangente per $y=mx+n$, eliminare y fra questa ed $y^2=px$, e rendere uguali i valori d'x.

La normale MN (F.^{a} 113) ha per eq. (332)

$$\text{II}\ldots\; y-y_,=-\frac{2x_,}{y_,}(x-x_,)\ \text{ossia}\ y=-\frac{2x_,}{y_,}x+y_,+\frac{2x_,^2}{y_,}.$$

Fatto $y=0$ l'eq. I dà $x_,=-x$ cioè AT=AP; quindi

$$\text{PT}\;(=\text{AT}+\text{AP})=2\,x\;(\text{sottang.})$$

valore che offre un facil metodo per condurre la tangente in un dato punto della parabola:

La stessa ipot. $y=0$ e la sostituzione di $p\,x_,$ per $y_,^2$, nell'eq. II, somministra x ossia $\text{AN}={}^1\!/_2\,p+x_,$; perciò

$PN (= AN - AP) = {}^{1}/_{2} p$ (sunnorm.)

$MN [= \sqrt{(y^2 + \overline{PN}^2)}] = \sqrt{p[x + {}^{1}/_{4}p]}$ [norm.]

§. 423. I trigoni simili AEF, TEF danno

$\overline{FE}^2 = {}^{1}/_{4}p.FT = {}^{1}/_{4}p\ FM = c.FM$,

e perchè FE è perpendicolare ad MT si verifica: *che le perpendicolari dal fuoco sulle tangenti stanno in ragione sudduplicata de' raggi vettori.*

Si vedrà (F.ª 114) che MFM è $= 2M'tM$

§. 424. Per passare dagli assi rettangoli Ax, Ay agli assi obbliqui MF', Mm, (F.ª 115) si osservi 1.° che essendo $t.\hat{x} = 0$ il sistema I del §. 369 diviene

$$x = \alpha + t + u \cos. u.\hat{x}, \; y = \beta + u \,sen.\, u.\hat{x}.$$

2.° Che si ha $\beta^2 = p\alpha$, e perciò $\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{p}{2\beta}$

3.° Che $tP : PM$ ossia $2\alpha : \beta :: 1 : tan. u.\hat{x}$,

vale a dire $tan. u.\hat{x} = \frac{\beta}{2\alpha}$; quindi

$$sen. u.\hat{x} = \frac{p}{\sqrt{[p(4\alpha + p)]}}$$ e la trasformata

$$sen.^2 u.\hat{x} u^2 + [2\beta\, sen. u.\hat{x} - p \cos. u.\hat{x}] u = pt + p\alpha - \beta^2$$

si riduce ad $u^2 = (4\alpha + p)t$, eq. che atteso il doppio valore euguale e di segno contrario, competente ad u, dimostra *che qualunque dia-*

metro MF′ *biseca le corde* nn′, NN′ ec., *parallele alla tangente condotta al suo vertice* M. Il parametro $4\alpha+p$ è $=4AP+4AB=4MM'=4MF$, cioè al quadruplo della distanza fra il fuoco ed il vertice del diametro: Esso è altresì $=nFn'$, corda parallela ad MT, perchè $F\hat{M}m=F\hat{M}T$ dà $Mp = MF$ e però

$$nn'(=2pn)=2\sqrt{(4\alpha+p)Mp}=2\sqrt{(4MF.MF)}=4MF.$$

§. 425. Sia [F.ª 116] una corda QR e si voglia lo spazio QARQ.

Bipartita la QR in C si tiri il diametro PCz e si descriva il trigono QPR; indi si bisechi la PR in C′, si conduca il diametro P′z', si descriva il trigono PP′R e sieno P′ω, C′ω' parallele a QR. Risulta in forza dell'eq. $u^2=[4h+p]t$

$P\omega : PC :: \overline{\omega P'}^2 : \overline{CR}^2$; e perchè $\omega P'=\omega' C'=CC''={}^1/_2 CR$ si ha $P\omega = {}^1/_4 PC$.

D'altronde $P\omega' = {}^1/_4 PC$: dunque

$\omega\omega' = P\omega = {}^1/_3 P\omega' = {}^1/_3 \omega' C$ e però

$$\begin{cases} \text{trig. } P'RC' : \text{trig. } C'RC'' :: P'C' : C'C'' :: 1 : 2, \\ \text{trig. } C'RC'' : \text{trig. } PRC :: \overline{C'C''}^2 : \overline{PC}^2 :: 1 : 4 : \end{cases}$$

Quindi trig. PRC = 8 trig. P′RC′, e raddoppiando,

trig. QPR = 8 trig. PP′R.

Procedasi alla bisezione di P′R, di PP′, ec. ed operando come sopra si troverà che il trig. PP′R è = 8 volte ciascuno de' due trigoni rettilinei inscritti, insistenti sulle respettive

basi PP', P'R, e così in seg. Avvertasi che le bisezioni C', c' danno due trigoni; che ne danno 4 le bisezioni di PR, PP'', Pp, pQ; 8 le bisezioni delle nuove corde ec. e si concluderà

$$QARQ = \text{trig. } QPR\left[1 + \frac{2}{8} + \frac{2^2}{8^2} + \frac{2^3}{8^3} \cdots\right]$$

$$= \text{trig. } QPR\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} \cdots\right] = [\ 122\ ]\ \tfrac{4}{3}\,\text{trig. } QPR.$$

Se la QR è ortogonale ad Ax [F.ª 120] si ha

$QMAbR = \frac{4}{3}$ trig. $QAR = \frac{2}{3}$ rettan. QS, ed $aAbR = \frac{2}{3}xy$,

cioè $= \frac{2}{3}$ del rettangolo fatto dalle coordinate ortogonali che determinano l' arco parabolico. [*]

§. 426. Probl. 1.° Si dimanda una curva in cui si verifichi che la distanza di cascun punto del suo perimetro da una retta data nel medesimo piano, stia alla distanza del punto stesso da un punto dato nel piano suddetto in una ragione assegnata $n : 1$ Soluz.ne Posta l'origine in F (F.ª 113) ed

$FM = z$ si ha $z^2 = y^2 + x^2$: ma $z = n[x + c]$. Dunque

$$y^2 = [n^2 - 1]\, x^2 + 2cnx + c^2 n^2,$$

eq. della ellisse, della parabola o dell' iperbola, secondo che abbiasi $n < 1$, $= 1$, > 1.

§. 427 Probl. 2.° Si dimanda il luogo geometrico de' centri di tutti i circoli i quali toc-

(*) Le analitiche tracce di questa indagine debbonsi ad *Archimede*.

cano un lato dell'angolo retto xAy [F.ª 117] e passano per un dato punto $M[x_{,}=AP, y_{,}=MP]$. Soluz.ne Sia B il contatto di uno de' circoli, C $[x\ y]$ il suo centro, CD perpendicolare sulla MP, e siccome $CM=CB=AP'=x$ si ha l'eq. parabolica

$$[x_{,}-x]^2+[y_{,}-y]^2=x^2, \text{ossia } y^2-2y_{,}y-2x_{,}x+x_{,}^2+y_{,}^2=0$$

§. 428. Probl. 3.° Dato un circolo di grandezza e di posizione, e data per rapporto ad esso una retta, trovare il luogo geometrico de' centri di tutti i circoli che toccano il circolo e la retta. Soluz.ne Presa per uno degli assi la retta data Ax, e pel 2.° la perpendicolare calata dal centro C del circolo dato sulla retta sud.ª [F.ª 118] sia C' il centro di uno de' circoli soddisfacenti al probl., $CA=a$, il raggio dato $CB=r$, $C'M(=AD)=y$, $AM=x$, e siccome $CC'=CB+C'M$ si avrà

$$(r+y)^2=(a-y)^2+x^2, \text{ cioè la parabola } x^2=2(r+a)y+r^2-a^2.$$

§. 429. Probl. 4.° Qual è la curva descritta dal vertice di un angolo retto i cui lati scorrono sul perimetro di una parabola? Soluz.ne Indicando una tangente per $y=mx+\frac{p}{4m}$ (421 n.° I) è $y=-\frac{1}{m}x-\frac{mp}{4}$ l'eq. di una 2.ª tangente ortogonale alla prec.

Per eliminare m che rende individuali le tangenti si tolga la 2.ª eq. dalla 1.ª, e la risultante $0=(m+\frac{1}{m})(x+\frac{1}{4}p)$ cioè $x=-\frac{1}{4}p$,

dimostrerà che il luogo richiesto è la direttrice parabolica DBD'.

Se l'angolo dato è qualunque, sieno (F.ª 119) Mm, $M'm$ due tangenti e suppongasi $M\hat{m}M'=\theta$. Indicando per $x_{,}$, $y_{,}$ le coordinate di M, per $x_{,,}$, $y_{,,}$ quelle di M', si hanno per le tangenti sopra indicate le respettive eq.ⁱ

$$y=\frac{y_{,}}{2x_{,}}x+\tfrac{1}{2}y_{,},\ y=-\frac{y_{,,}}{2x_{,,}}x-\tfrac{1}{2}y_{,,};$$

ossia, perchè $x_{,}=\frac{y_{,}^{2}}{p}$, $x_{,,}=\frac{y_{,,}^{2}}{p}$ ed $y=0$ dà $x=-x_{,}$, $x=-x_{,,}$ cioè $x<0$,

$$2yy_{,}=-px+y_{,}^{2},\ 2yy_{,,}=px-y_{,,}^{2}:$$

quindi $y_{,}=y\pm\sqrt{y^{2}+px}$, $y_{,,}=-y\pm\sqrt{y^{2}+px}$;

ma $\quad tan.\,\theta=tan.\,(\mathrm{MTA}+\mathrm{M'T'A})$

$$=\frac{m+m'}{1-mm'}=\left(\frac{y_{,}}{2x_{,}}+\frac{y_{,,}}{2x_{,,}}\right):\left(1-\frac{y_{,}y_{,,}}{4x_{,}x_{,,}}\right)$$

$$=\frac{2(x_{,}y_{,,}+x_{,,}y_{,})}{4x_{,}x_{,,}-y_{,}y_{,,}}=\frac{4\sqrt{y^{2}+px}}{4x-p}.$$

Dunque

$$y^{2}+\left(\frac{tan.^{2}\theta}{2}+1\right)px-tan.^{2}\theta.x^{2}-\frac{p^{2}tan.^{2}\theta}{16}=0$$

eq. iperbolica. Si ponga $x=t+\mu$: si determini μ in guisa che sparisca il termine affetto da t, e si avrà

$$\mu = {}^1\!/_4 p\left({}^1\!/_2 + \frac{1}{tan.^2\theta}\right),\ y^2 = tan.^2\theta\, t^2 - p^2\,\frac{(tan.^2\theta+1)}{4\, tan.^2\theta}.$$

L'ipot. $\theta = 100.°$ dà $t=0$, $\mu = {}^1\!/_4 p$ ed $x = {}^1\!/_4 p$, come ec.

§. 430. Per compiere la teoria delle curve coniche proponiamo alcune indagini che indistintamente a tutte si riferiscono, e sono:

Probl. 1.° Si dimanda l'eq. della tangente che da un dato punto $(x_{,}, y_{,})$ può condursi ad una curva conica nota di specie e di posizione. Soluz.^{ne} S'indichino per. $y^2 = px + qx^2$ tutte le anzidette curve, per $y - y_{,} = m(x - x_{,})$ la tangente, ed inerendo al metodo del §. 375 si troverà

$$m = \frac{1}{y_{,}}\left\{{}^1\!/_2 p + qx_{,} \pm \sqrt{(y_{,}^2 - px_{,} - qx_{,}^2)}\right\}$$

Quindi $m = \frac{p}{2y_{,}}$, come nel § 422, se $q=0$, cioè se trattasi della parabola. (*) e se il punto assegnato è nel perimetro parabolico.

§. 431 Probl. 2.° Sono dati due circoli in un piano, si suppone che una tangente del 1.° tagli il 2.° in due punti M, M', e che per M, M' sieno condotte all' anzidetto 2.° circolo due tangenti. Si dimanda la curva che comprende tutti i punti d'incontro delle tangenti tirate come sopra. Soluz.^{ne} Chiamando x, y le coordinate di uno qualunque de' punti d'incontro, r, r' i raggi de' circoli 1.° e 2.°, δ la distanza de' loro centri, si trova l'eq. finale

(*) Facilmente si vede che $\frac{p}{2y_{,}} = \frac{y_{,}}{2x_{,}}$.

$$r^2 y^2 + (r^2 - \delta^2) x^2 - 2\delta r'^2 x - r'^4 = 0$$

che appartiene all' ellisse, all' iperbola, alla parabola, secondo che $r >, <, =, \delta$.

§. 432. Teor. *Data di posizione una retta per rapporto ad una curva conica, se da ciascun suo punto* m, m', m'' ec. *si tirano due tangenti*

mM, mn; m'M', m'n'; m''M'', m''n''; ec.

essendo M, n; M', n'; M'', n'' ec. *i respettivi contatti, tutte le corde* Mn, M'n', M''n'', ec. *s' incontrano in uno stesso punto.*

§. 433. Teor. *Prolungando i lati opposti di un esagono inscritto in una curva conica, i tre punti d' incontro sono in linea retta.* (*)

Probl. Si hanno due corde MM', NN', di una curva di 1.° ordine; una è stabile, l' altra mobile intorno ad un suo punto fisso. Congiunti gli estremi M, N'; M', N, le nuove corde s' intersegano: qual è il luogo geometrico a cui l' intersezione successivamente corrisponde?

Risp. Una curva di 1.° ordine

Probl. Posta la costruzione prec. vuolsi che il punto fisso sia nella corda stabile MM, ovvero nel suo prolungamento (F.ª 120)

Risp. Il luogo richiesto è la retta che congiunge i contatti delle tangenti P*t*, P*t'*, tirate dal punto fisso P.

(*) Questo teor. è stato dimostrato anche da *Carnot* nella sua Geom. di Posizione p. 452.

ARTICOLO II.

AFFEZIONI E SINTOMI CARATTERISTICI DELLE LINEE CURVE: COSTRUZIONE DELL' EQ.[i] SUPERIORI

Del centro e de' diametri.

§. 434. Una curva è dotata di centro se la sua eq. non si altera cangiando x, y in $-x, -y$, e ciò si verifica nell' eq.[i] di grado pari quando tal' è la somma degli esponenti di ciascun termine, come in

$$\left.\begin{array}{l} y^{2m}+a_1 x y^{2m-1}+a_2 x^2 y^{2m-2} \ldots + a_{2m-1} x^{2m-1} y + a_{2m} x^{2m} \\ \quad +b_1 x y^{2m-3}+b_2 x^2 y^{2m-4} \ldots + b_{2m-3} x^{2m-3} y + b_{2m-2} x^{2m-2} \\ \quad +c_1 x y^{2m-5}+c_2 x^2 y^{2m-6} \ldots + c_{2m-5} x^{2m-5} y + c_{2m-4} x^{2m-4} \\ \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \qquad \text{ec.} \end{array}\right\} = 0$$

Succede lo stesso nell' eq.[i] di grado dispari qualora l' anzidetta somma sia dispari.

Per assicurarsi se una data curva abbia centro basta dunque osservare, se trasportando l' origine in un punto del suo piano, possono eliminarsi i termini di grado dispari dalla sua eq. di grado pari, ovvero i termini di grado pari dalla sua eq. di grado dispari.

Se trattisi delle curve di 2.° genere fa d'uopo eliminare i termini ey^2, fxy, gx^2, l, e perchè la trasformazione a tal uopo necessaria introduce due indeterminate, rimangono due eq.[i] condizionali. Cresce il n.° delle condizioni a misura che s'innalza l'ordine della curva.

Dicesi diametro *semplice* un asse delle ascisse, talmente situato, che la somma delle ordinate positive eguagli quella delle negative. Ogni diametro di tal natura bipartisce dunque lo spazio compreso nella curva, ed in seguito si vedrà che per determinarne l'esistenza basta verificare se il 2.° termine dell'eq. esprimente la curva possa eliminarsi.

Il diametro *assoluto* è collocato in guisa per rapporto al perimetro della curva, che a ciascun suo punto corrisponda un n.° di ordinate positive uguale a quello delle negative, con la condizione che ognuna delle prime abbia la sua eguale fra le seconde.

Si ha diametro assoluto quando la sostituzione d'

$$x=u\cos.\hat{u.x}+t\cos.\hat{t.x}, y=\beta+u\,\text{sen}.\hat{u.x}+t\,\text{sen}.\hat{u..x}$$

basta per eliminare dalla trasformata i termini affetti dalle potenze dispari di u, il che dipende da un n.° di condizioni eguale a quello de' termini da eliminarsi diminuito di 3, perchè tre sono le indeterminate β, $\hat{t.x}$, $\hat{u.x}$.

Trattandosi di una curva di 2.° grado si ha facilmente l'eq. de' due diametri a cui è riferita.

Basta risolvere l'eq. della curva, prima per rapporto ad y, indi per rapporto ad x, e trascurare la funzione affetta dal radicale. L'eq. della curva essendo al solito

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$$

si trova (369) per l'uno e per l'altro diametro

$$y=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{Bx+D}{A}\right),\quad x=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{By+E}{C}\right).$$

Con questo sistema si determina la posizione del centro.

Delle tangenti e delle seganti

§. 435. La trasversale ∂ (368) diviene tangente allorchè

$$[(2Am+B)y_{,}+(Bm+2C)x_{,}+Dm+E]^2=$$

$$4(Am^2+Bm+C)(Ay_{,}^2+Bx_{,}y_{,}\ \text{ec.}+F).$$

Supponendo il punto $(x_{,}, y_{,})$ nel perimetro della curva la condizione prec. si riduce a

$$(2Am+B)y_{,}+(Bm+2C)x_{,}+Dm+E=o\,,\ldots(1)$$

Dato m si ha $x_{,}$ ed $y_{,}$ per mezzo della prec. e della $y-y_{,}=m(x-x_{,})$, e vicev.

Il sist. dell'eq.^{i} (1), $Ay_{,}^2+Bx_{,}y_{,}$ ec. $+F=o$ determina che la trasversale tocca la curva in un punto $(x_{,}, y_{,})$, e per avere l'eq. di una

tangente qualunque basta eliminare m dall'eq. (1) sostituendovi $\frac{y-y_{,}}{x-x_{,}}$, e modificare la trasformata mediante l'eq. $Ay_{,}^2+Bx_{,}y_{,}$ ec. $+F=0$. La risultante, scrivendo per comodo $2B, 2D, 2E$ per B, D, E, comparisce sotto la forma.

$$(a)\ldots(Ay_{,}+Bx_{,}+D)y+(By_{,}+Cx_{,}+E)x+Dy_{,}+Ex_{,}+F=0$$

S' immagini che la tangente debba passare pel punto (α, β), sostituiscasi β per y, α per x, e ordinando per rapporto ad $y_{,}$, $x_{,}$ si avrà

$$(A\beta+B\alpha+D)y_{,}+(B\beta+C\alpha+E)x_{,}+D\beta+E\alpha+F=0$$

L'eq. relativa alla 2.ª tangente tirata per (α, β), il contatto essendo $(x_{,,}, y_{,,})$ si ottiene con sostituire $x_{,,}$ per $x_{,}$, $y_{,,}$ per $y_{,}$. Dunque l'eq.

$$(A\beta+B\alpha+D)y+(B\beta+C\alpha+E)x+D\beta+E\alpha+F=0\ ,\ldots(2)$$

siccome resta soddisfatta dalle coordinate $x_{,}, y_{,}$; $x_{,,}, y_{,,}$, appartiene alla retta che passa per l'uno e l'altro contatto

Volendo il semmento $\delta_{,}$ della trasversale δ, compreso fra il punto (α, β) e la retta (2) basta eliminare x, y mediante l'anzidetta eq. ed il sistema

$$y=m\lambda\delta+\beta\ ,\ x=\lambda\delta+\alpha\ .$$

Il risultamento è

$$\lambda[(Am+B)\beta+(Bm+C)\alpha+Dm+E]\delta_{,}+$$
$$A\beta^2+2B\alpha\beta+C\alpha^2+2D\beta+2E\alpha+F=0,$$

e mettendo l'eq. (a') del §. 368, dopo la so-

stituzione di α, β per $x_{,}$, $y_{,}$, sotto la forma $\mu'\delta^2+2\nu'\delta+\rho'=0$, la prec. eq. equivale a $\nu'\delta_{,}+\rho'=0$

Sieno δ', δ'' i valori esprimenti. le porzioni di δ comprese fra (α, β) e la curva, e si avrà

$$\frac{\delta''}{\delta'}=\frac{-\nu'+\sqrt{(\nu'^2-\mu'\rho')}}{-\nu'-\sqrt{(\nu'^2-\mu'\rho')}}=\frac{[-\nu'+\sqrt{(\nu'^2-\mu'\rho')}]\,[-\nu'-\sqrt{(\nu'^2-\mu'\rho')}\,]}{2\nu[\nu'+\sqrt{(\nu'^2-\mu'\rho')}\,]-\mu'\rho'}$$

$$=\frac{\rho'}{-2\nu'\delta'-\rho'}=-\frac{\delta_{,}}{\delta_{,}-2\delta'}$$: quindi

$$\delta_{,}\delta''-\delta'\delta''=\delta'\delta''-\delta_{,}\delta'$$, cioè

Teor. $\delta' : \delta'' :: \delta_{,}-\delta' : \delta''-\delta_{,}$

proporzione che nella fig.[a] 102 equivale ad

BE : BF : : EG : GF.

§. 436. Essendo proposta una retta $hy+kx+1=0$, dove h, k si suppongono indeterminati, può cercarsi qual rapporto dee sussistere fra h e k onde la retta tocchi una data curva di 1.° ordine. Fatta per brevità l'ipot. che la curva sia dotata di centro, vi si trasferisca l'origine con sostituire $x+\alpha$ per x, $y+\beta$ per y. Profittando dell'eq. (a) (367) quella della tangente, cioè l'eq. (a) del §. prec. si cangia in

$$(2Ay_{,}+Bx_{,}+D)y+(By_{,}+2Cx_{,}+E)x+Dy_{,}+Ex_{,}+2F=0$$

e mediante la sostituzione indicata, in forza dell'eq.[i] (2) del §. 370, si trasforma in

$$(2Ay_{,}+Bx_{,}+D)y+(By_{,}+2Cx_{,}+E)x+D\beta+E\alpha+2F=0$$

Per far coincidere con questa l' eq. $hy+kx+1=0$ trasformata in $hy+kx+1+h\beta+k\alpha=0$, ossia

$$\frac{h}{1+h\beta+k\alpha}\cdot y+\frac{k}{1+h\beta+k\alpha}x+1=0 \text{ si ponga}$$

$$\left.\begin{aligned} 2Ay_{,}+Bx_{,}+D&=\frac{h(D\beta+E\alpha+2F)}{1+h\beta+k\alpha}=h\sigma \\ By_{,}+2Cx_{,}+E&=\frac{k(D\beta+E\alpha+2F)}{1+h\beta+k\alpha}=k\sigma \end{aligned}\right\}\ldots(3)$$

Quindi $\begin{cases} 2Ay_{,}^2+Bxy_{,}+Dy_{,}=h\sigma y_{,} \\ Bx_{,}y_{,}+2Cx_{,}^2+Ex_{,}=k\sigma x_{,}, \end{cases}$

$$Ay_{,}^2+Bxy_{,}+Cx_{,}^2+\tfrac{1}{2}(Dy_{,}+Ex_{,})=\tfrac{1}{2}\sigma(hy_{,}+kx_{,})$$

ossia $-F-\tfrac{1}{2}(Dy_{,}+Ex_{,})=\tfrac{1}{2}\sigma(hy_{,}+kx_{,})$

cioè $(D+h\sigma)y_{,}+(E+k\sigma)x_{,}+2F=0.$

Ma dall' eq.[i] (3)

$$x_{,}=[(2Ak-Bh)\sigma+BD-2AE]:(4AC-B^2)$$

$$y_{,}=[(2Ch-Bk)\sigma+BE-2CD]:(4AC-B^2).\ (*)$$

Dunque, restituita l'espressione di σ, si ha la condizione richiesta

$$(Ak^2-Bhk+Ch^2)(D\beta+E\alpha+F)^2-$$
$$[CD^2+AE^2-BDE-(4AC-B^2)F](1+h\beta+k\alpha)^2=0\ldots(4)$$

(*) Questa espressione ottiensi sostituendo quella d'$x_{,}$ nella 2.[a] dell' eq.[i] (3).

§. 437 Per profittare della prec. eq. (4) sia Probl. È data una curva di 1.° ordine MIM'H (F.ª 121) e si suppone che una sua trasversale LK prenda tutte le posizioni possibili, restando però sempre tangente di un'altra data curva dello stess' ordine, QNR, e si dimanda il luogo geometrico de' punti P, determinati dall' incontro delle tangenti ne' punti M,M', ove la trasversale sega la curva MIM'H. Soluz.ne Sia $px^2+qy^2=1$ l'eq. della curva MIM'H (Il calcolo è consimile se la curva sia priva di centro), e perciò $px_,x+qy_,y=1$ l'eq. della MP tangente in $M(x_,, y_,)$. Chiamando t, u le coordinate di P si ha $ptx_,+quy_,=1$, e siccome pel 2.° contatto sussiste $ptx_{,,}+quy_{,,}=1$, l'eq. della trasversale LK è $ptx+quy=1$. Sostituiscasi pt per h, qu per k nella condizione (4), e la risultante di 2.° grado in t, u, darà pel richiesto luogo geometrico una 3.ª curva di 1.° ordine.

Cercando direttamente il luogo de' punti P nell' ipot. che le curve date sieno circoli, si trova l'eq. esposta sul fine del §. 431, eq. che suppone l'origine nel centro del 2.° circolo, e dipende da due coppie di trigoni ortogonali simili.

Il predetto luogo si cangia in una retta se la trasversale soggettasi alla sola condizione di dover passare per un punto fisso (α, β), nel qual caso si ha l'eq. finale $pt\alpha+qu\beta=1$, e si riferisce alla retta che passa per li contatti delle tangenti condotte dal punto (α, β)

§. 438. Può adesso cercarsi l'eq. della retta che tocca in un dato punto $(x_{,}, y_{,})$ una data curva di qualunque ordine.

La curva essendo

$$a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gxy^2 + hyx^2 \text{ ec.} = 0$$

se ne tolga $a + bx_{,} + cy_{,} + dx_{,}y_{,}$ ec. $= 0$ onde avere

$$0 = b(x - x_{,}) + c(y - y_{,}) + d(xy - x_{,}y_{,}) + e(x^2 - x_{,}^2) +$$

$$f(y^2 - y_{,}^2) + g(xy^2 - x_{,}y_{,}^2) + h(yx^2 - y_{,}x_{,}^2) \text{ ec.}$$

ossia (147 sul fine)

$$(5) \ldots 0 = (b + dy_{,} + 2ex_{,} \text{ ec.})(x - x_{,}) + (c + dx_{,} + 2fy_{,} \text{ ec.})(y - y_{,}) +$$

$$(d + \text{ec.})(x - x_{,})(y - y_{,}) + (e + \text{ec.})(x - x_{,})^2 + (f + \text{ec.})(y - y_{,})^2 \text{ ec.}$$

Per considerare i soli punti in cui la retta $y - y_{,} = m(x - x_{,})$ incontra la curva si può sostituire nell' eq. (5) $m(x - x_{,})$, per $y - y_{,}$. Così, soppresso il fattore $x - x_{,}$, e fatto, per passare dalle intersezioni al contatto, $x = x_{,}$, resta

$$b + dy_{,} + 2ex_{,} \text{ ec.} + m(c + dx_{,} + 2fy_{,} \text{ ec.}) = 0,$$

e perciò $m = -\dfrac{b + dy_{,} + 2ex_{,} \text{ ec.}}{c + dx_{,} + 2fy_{,} \text{ ec.}}$.

Se per es.° l'eq. della curva è $y^2 + x^2 - r^2 = 0$ si trova $m = -\dfrac{x_{,}}{y_{,}}$ come (375 sul fine); ed $m = -\dfrac{px_{,}}{qy_{,}}$ per rapporto alla curva $px^2 + qy^2 = 1$

De' rami infiniti.

§. 439 Una curva è dotata di qualche ramo infinito 1.° quando ad $x=\infty$ corrisponde un' ordinata reale (finita od infinita): 2.° allorchè per un reale valor d'x si ha $y=\infty$. Nel 1.° caso si cerchino (149) le serie esprimenti y nell' ipot. d' x grandissima, vicev. nel 2.°, serie che (146) sono della forma

$$y=\ldots Px^{\gamma}+Qx^{\beta}+Rx^{\alpha}\text{ ec.}+P'x^{-\gamma'}+Q'x^{-\beta'}\text{ ec.}\ldots\text{ (I)}$$

dove il n.° de' termini affetti dalle potenze negative è limitato. Pongasi

$$y_{1}=\ldots Px^{\gamma}+Qx^{\beta}+Rx^{\alpha}\text{ ec.}\ldots\text{ (II)} \qquad \text{e si avrà}$$

$$y-y_{1}=P'x^{-\gamma'}+Q'x^{-\beta'}\text{ ec.}, \text{ cioè } y=y_{1} \text{ quando } x=\infty\text{.}$$

La curva (I) si accosta dunque indefinitamente alla curva (II) e n' è un assintoto curvilineo.

Siccome l' eq. parabolica $y=Px^{2}+Qx+R$ è compresa nella formola (II) diconsi *rami parabolici* quelli i cui assintoti sono espressi con la formola citata; e perchè gli assintoti dell' iperbola conica sono rettilinei, diconsi *rami iperbolici* quelli i cui assintoti sono caratterizzati con un' eq. della forma $y=Qx+R$.

Questi sono paralleli ad Ax se Q=o, coincidono con Ax se Q=o ed R=o.

Ciascuna dell' eq.^{i}

$$y=y_{,}+P'x^{-\gamma'};\ y=y_{,}+P'x^{-\gamma'}+Q'x^{-\beta'};\ \text{ec.}$$

si riferisce ad un ramo assintotico.

Il 1.° assintoto curvilineo di un ramo iperbolico ha per equazione

$y=Qx+R+P'x^{-\beta'}$. Questa, sostituendo

$$x=u\ cos.\ \hat{u.x}\ ,\quad y=k+t+u\ sen.\ \hat{u.x},$$

e per maggior semplicità, $x=mu$, $y=k+t+nu$ si trasforma in

$$nu+t+k=Qmu+R+P'm^{-\beta'}u^{-\beta'},$$

eq. che sempre si può ridurre a $t=P'm^{-\beta'}.u^{-\beta'}$, perchè facendo $n=Qm$ e $k=R$, si hanno per determinare m, n l'eq.^{i} $n=Qm$, $m^2+n^2=1$, le quali danno i valori reali

$$m=\frac{1}{\sqrt{(1+Q^2)}}\ ,\ n=\frac{Q}{\sqrt{(1+Q^2)}}.$$

Le curve $t=P'm^{-\beta'}u^{-\beta'}$, siccome comprendono come caso particolare l'eq. $t=p\,u^{-1}$ dell'iperbola conica, diconsi *iperbole de' gradi superiori*, e quantunque sieno assintoti d'altra curva iperbolica, hanno anch' esse i loro assintoti, cioè gli assi delle t, u, poichè a t=o corrisponde $u=\infty$ e viceversa.

L' assintoto curvilineo di qualunque ordine, spettante ad un ramo iperbolico, ed espresso per

$$y=Qx+R+P'x^{-\beta'}+Q'x^{-\gamma'} \text{ ec.}$$

si trasforma come sopra in

$$t=P'm^{-\beta'}u^{-\beta'}+Q'm^{-\gamma'}u^{-\gamma'}+\text{ec.},$$

ha per assintoto rettilineo l'asse delle t, l'iperbola $t=P'm^{-\beta'}u^{-\beta'}$ per assintoto curvilineo.

Scoperta la natura dell' assintoto (parabolico se $\gamma>1$, iperbolico se $\gamma=1$) fa d' uopo assicurarsi che niun termine divenga immaginario, e per tale oggetto altra scorta non vi è che la legge con cui progrediscono i termini componenti il 2.° membro dell' eq. I.

Ne' soli rami iperbolici rappresentati dall' eq. $y=P+P'x^{-\beta'}$, ad $x=\infty$ corrisponde un finito valore d' y; ma con rendere gli assi obbliqui agli assintoti rettilinei, diviene infinita l' una e l' altra coordinata: dunque le coordinate di un ramo infinito possono supporsi entrambe infinite. È fondato su questa ipot. il seg.

§. 440 Met. 2.° L' infinito aumento d' x, y, fa svanire nell' eq. di una curva dell' ordine n tutti i termini di una dimensione $<n$; l' eq. si riduce ad

$$Ay^n+By^{n-1}x+Cy^{n-2}x^2 \ldots +Vx^n=0 \ldots (4);$$

se $y=hx$ n' è un assintoto, si cangia in

$$Ah^n+Bh^{n-1}+Ch^{n-2}\ldots+V=0\ldots\ldots(2)$$

e qualora siavi un reale valore di h $\left(=\frac{a}{b}\right)$ è $by-ax=0$ l'eq. di un assintoto rettilineo; essi son dunque tanti quante le risolventi reali dell'eq. (2).

Sieno s_n, s_{n-1}, ... s_2, s_1, s_0, gli aggregati rispettivi de' termini di n, $n-1$, ... 2, 1, zero dimensioni, componenti l'eq. proposta. Siccome s_n è per ipot. della forma $(ay-bx)^\mu$; essa equivale ad

$$ay-bx=-\frac{s_{n-1}}{\mu}-\frac{s_{n-2}}{\mu}-\text{ec.}-\frac{s_0}{\mu};$$

e sostituendo nel 2.° membro $\frac{bx}{a}$ per y, attesa l'omogeneità di μ con s_{n-1}, si ottiene

$$ay-bx=\alpha+\frac{\alpha'}{x}+\frac{\alpha''}{x^2}\ldots+\frac{s_0}{x^{n-1}},\ldots(3),$$

dove α, α', α''.... s_0, sono costanti; e nell'ipot. d'$x=\infty$ si possono assumere le successive eq.[i]: $ay-bx=\alpha$ (assint. rettil.); $ay-bx=\alpha+\frac{\alpha'}{x}$ (1.° assint. curvil.) ec.

Qualora s_n contenga $(ay-bx)^2$ ogni termine della funzione (3) risulta infinito, perchè μ è della forma $\nu(ay-bx)$, e si riduce a zero, mediante la sostituzione di $\frac{bx}{a}$ per y.

Per supplire al difetto del metodo pongasi $a y - b x = u$, e siccome s_n dev'essere divisibile per u^2 si avrà

$$s_n = A u^2 t^{n-2} + A' u^3 t^{n-3} + A'' u^4 t^{n-4} \text{ ec.}$$
$$s_{n-1} = B t^{n-1} + B' u t^{n-2} + B'' u^2 t^{n-3} \text{ ec.}$$
$$s_{n-2} = C t^{n-2} + C' u t^{n-3} + C'' u^2 t^{n-4} \text{ ec.}$$
ec. ec:

I soli termini fra i prec.ᵗⁱ, che aver possano fra loro qualche rapporto quando $t = \infty$, essendo $A u^2 t^{n-2}$, $B t^{n-1}$, l'unica eq. ammissibile è $A u^2 + B t = o$: perciò la curva espressa dell' eq. (1) ha due rami che all' infinito si confondono con la parabola, cioè due assintoti parabolici.

Se $B = o$ l'unica eq. approssimata che può assumersi è

$$A u^2 t^{n-2} + B' u t^{n-2} + C t^{n-2} = o, \text{ cioè } A u^2 + B' u + C = o,$$

ma bisogna che i valori di u sieno reali. Tralasciamo di considerare il caso che s_n contenga il fattore $(a y - b x)^3$, ec. perchè tal discussione non è nè difficile nè interessante. E per la stessa ragione omettiamo la prolissa indagine che potrebbe intraprendersi per rapporto alla costruzione de' rami assintotici. Persuasi di dover riserbare alla Geom.ᵃ Sublime ogni ulteriore investigazione, terminiamo il presente artic. osservando che il n.° de' rami infiniti è sempre pari. Infatti l'esistenza di un ramo di tal natura, esige che la serie esprimente l'ordinata infinita sia reale o semi-im-

maginaria: Nel 1.° caso ad ogni valore di $\pm x$ corrisponde un real valore d'y e però ec.; nel 2.° si ha il doppio segno del radicale.

Intersezione delle curve e costruzione dell' eq.ⁱ superiori al 2.° grado.

§. 441. Se due date curve s'incontrano le coordinate che corrispondono alle intersezioni sono identiche: ivi dunque coesistono le respettive eq.ⁱ, e non si tratta che di eliminarne una coordinata per aver dall'eq. finale i valori dell'altra; valori che sostituiti nella più semplice dell' eq.ⁱ date, determinano, quando le risolventi di essa sono reali, il n.° e la posizione de' punti comuni ad ambedue le curve. Le curve proposte essendo per es.° la parabola $y^2 = 2ax - 2ab$ ed il circolo $y^2 = 2ax - x^2$, si ha mediante la sottrazione $x^2 - 2ab = o$, cioè $x = \pm\sqrt{2ab}$, e sostituendo nella 1.ª eq. proposta, $y = \sqrt{[2a(\pm\sqrt{2ab} - b)]}$; dunque due sono le intersezioni se $2a > b$.

Le curve $y^2 - xy = a^2$, $y^4 - 2xy^3 + x^3y = b^2x^2$, ne ammettono quattro perchè danno

$$x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\ y = \frac{a^2 \pm \sqrt{5a^4 + 4a^2b^2}}{2\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Trattandosi di due circoli

$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2$, $(y-\beta_{,})^2+(x-\alpha_{,})^2=r_{,}^2$
si ottiene sottraendo la 1.ª,

$$y=\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha_{,}^2-\beta_{,}^2-r^2+r_{,}^2-2(\alpha-\alpha_{,})x}{2(\beta-\beta_{,})}$$

e fatta la sostituzione in una delle proposte si ha un' eq. di 2.º grado in x. Dunque le intersezioni di due circoli non sono più di due.

La stessa operazione su due eq.ⁱ analoghe all' eq. (a) del §. 367, e che indichiamo per $y^2+Py+Q=0$, $y^2+P_{,}y+Q_{,}=0$, purchè il coefficiente d' x^2 non sia $=1$, dà $y=\frac{Q_{,}-Q}{P-P_{,}}$ affetto da x^2, e sostituendo si perviene ad un' eq. di 4.º grado in x.

Per dare un es.º d'intersezione reale, determinata da valori razionali, sieno le curve

$$y^2=2ax\ ,\ y^2-4ay-2ax+x^2+4a^2=0\,,$$

la 2.ª delle quali appartiene al circolo riferito ad un asse, distante di $2a$ da un suo diametro parallelo, $=2a$. Tolta la 1.ª dalla 2.ª risulta $4ay-x^2-4a^2=0$, cioè $y=\frac{x^2+4a^2}{4a}$, e sostituito questo valore nella 1.ª si ottiene

$$x^4+8a^2x^2-32a^3x+16a^4=0\,,$$

eq. a cui soddisfa $x=2a$: quindi $y=\frac{4a^2+4a^2}{4a}=2a$: dunque si ha un' intersezione in quel punto della parabola ove ciascuna coordinata è $=2a$.

Per appurare tutti i valori reali d'x, y, e talvolta anche per giungere all'eq. eliminata, si richiedono speciali metodi ch'esporremo ne' libri III e IV. Per ora ci basta di aver fatto conoscere lo spirito del metodo che dee seguirsi.

§. 442. L'artifizio per costruire le risolventi d'ogni eq. algebrica di un ordine superiore al 2.° , si riduce a scegliere due eq.ⁱ in x,y, tali che eliminando un'incognita ne derivi l'eq. assegnata: l'eq.ⁱ prescelte appartengono a due curve, le cui intersezioni determinano le ascisse eguali alle risolventi cercate: fa però d'uopo assicurarsi che la costruzione non venga imbarazzata dalle intersezioni immaginarie, ed a tal effetto si assume una dell'eq.ⁱ ausiliari sotto la forma $y=a+bx+cx^2$ ec. spettante ad una curva del genere parabolico, oppure si preferisce l'eq. più ampia $M+Ny=0$, dove M, N sieno razionali funzioni d'x. Fatta questa ipot. facilmente si vede che la 2.ª eq. ausiliare dee mediante la sostituzione di $=\frac{M}{N}$ per y, trasformarsi nella proposta: che in conseguenza essa coincide con quella, la quale ottiensi sostituendo nella proposta in vece d'y, la funzione $-\frac{M}{N}$, ovvero l'espressione di una funzione d'x in essa esistente, tratta dalla $M+Ny=0$.

Sia $x^4 \pm ax^2 + bx - c = 0$, la dimensione di a, b, c essendo respettivamente doppia, tripla, quadrupla, e si riguardi la proposta come il

risultamento della eliminazione di un'incognita y fra due eq.[i] di 2.° grado in x, y. Assunta ad arbitrio l'eq. $x^2 = py$ si ottiene

$$p^2 y^2 \pm apy + bx - c = 0,$$

e traslocando l'origine con fare $y = z \mp \frac{a}{2p}$ ne deriva

$$z^2 + \frac{bx}{p^2} - \frac{4c \pm a^2}{4p^2} = 0,$$

cioè l'eq. parabolica $z^2 = \frac{b}{p^2}\left[\frac{4c \pm a^2}{4b} - x\right]$....(1)

Nell' ipot. di $a<0$ si alzi (F.[a] 122) Aa perpendicolare ad Ax, $= \frac{a}{2p}$, ed ac parallela ad Ax sarà l'asse delle ascisse da cui si dee partire per avere le z: il vertice della parabola espressa coll' eq. (1) è in b dove $z=0$, ipot. che dà $x = \frac{4c \pm a^2}{4b}$ $(= ab)$. La parabola (1) di cui si conosce il vertice b, l' asse baa' ed il parametro $\frac{b}{p^2}$, si può dunque descrivere. Facciasi lo stesso per rapporto alla parabola $x^2 = py$, indicata per BAC, curva il cui parametro p, il vertice A, l' asse Ay; e le ascisse AP, AP′, AP″, AP‴, corrispondenti ai punti M, M′, M″, M‴, ne' quali le due parabole s' intersegano, saranno le risolventi della proposta.

Le ascisse anzidette si riducono a due quando $a > 0$ caso in cui l'asse baa' passa al di sotto di Ax, ed a tale distanza da esso che il ramo bE più non attraversi la parabola BAC: svaniscono tutte allorchè il termine $\frac{a}{2p}(> 0)$ è di tal grandezza, che la curva DbE cade tutta al di sotto di Ax.

Mettendo la proposta sotto la forma

$$x^4 - ax^2 + bx + c^2d^2 = 0\ (*)$$

può farsi $xy = cd$, onde avere

$$x^4 - ax^2 + bx + x^2y^2 = 0,\ \text{ossia}\ x^2 - a + \frac{b}{x} + y^2 = 0,$$

eq. che equivale ad $x^2 + y^2 + \frac{by}{cd} - a = 0$ e spetta al circolo.

Si descrivano fra gli assintoti rettangoli QAQ', P''AP' (F.ª 123) le iperbole equilatere, la cui potenza sia $= cd$; prendasi inferiormente ad AP la retta $AC = \frac{b}{2cd}$, ed il circolo descritto col centro C ed il raggio $= \sqrt{(\overline{AC}^2 + a)}$, incontrando le iperbole opposte ne' punti M, M', M'', M''', determina i richiesti valori d'x, espressi per AP, AP', AP'', AP''', e perciò si vede che le risolventi di un' eq. di 4.° grado sono quattro.

(*) L'omogeneità esige che l'ultimo termine sia della forma $\alpha\beta\gamma\delta$, e può sempre supporsi $\alpha\beta = c^2$, $\gamma\delta = d^2$.

Osserviamo intanto che per costruire un'eq. cubica $x^3 + px + q = 0$ basta moltiplicarla per x e paragonarla coll' eq. generale

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0.$$

Così la costruzione d' $x^3 - 2m^3 = 0$, eq. che serve alla duplicazione del cubo, si fa dipendere dalla doppia intersezione delle parabole $x^2 = py$, $z^2 = \frac{2m^3}{p^2} x$(*); e l'eq. $x^3 - {}^3/_4 r^2 x + {}^1/_4 r^2 k = 0$ relativa alla trisezione di un angolo (227), trattata nella stessa guisa somministra tre valori per x, valori che a suo luogo si vedrà essere

$$sen.\,a,\ sen.(^1/_3\,\pi + a),\ -sen.(^1/_3\,\pi + a).$$

Mediante l' intersezione di un circolo e di un' iperbola elegantemente si costruisce la soluz. del probl. di cui (340)

L' angolo assegnato sia IBM, (F.ª 124) C un punto esterno dato, e la trasversale richiesta CED sicchè ED $= \delta$. Condotte le GL', CI', respettivamente parallele a BJ e BM, si conosce la CA e la CF, e compito il rombo F4, basta tirare AG parallela alla CED, ed HEK parallela a BD, per vedere che il punto G, estremo di una retta AG $=$ ED $= \delta$, che parte da un punto cognito A, appartiene alla circonferenza circolare NGL data di posizione.

Dai trigoni eguali CDF, CDL, tolgasi respettivamente trig. BDE + trig. CEH, tri. EDK + tri. CEA, e si avrà

$$\text{rombo FE} = \text{rombo EL} = \text{AE.BD}\ sen.\,\text{E}\hat{\text{B}}\text{D};$$

(*) Basta fare nell' eq. (1) $b = -2m^3$, $a = 0$, $c = 0$.

$FD . DG sen. E\hat{B}D [=(HE.AE + EK.AE) sen. E\hat{B}D]=$ al rombo FA, e però il punto G appartiene anche ad un'iperbola conica GAg descritta fra i noti assintoti CF, FD, e che passa per A. Esso è pertanto nell' incontro dell' iperbola pred.ª e del circolo NGL. Trovato G si tiri GD parallela a BA e la GD darà $ED=\delta$. Infatti se conducesi la GN parallela a BD, si ha per la natura dell' iperbola

$$BA : DG :: FD : AC :: FC \; o \; BA : AE ,$$

cioè $AE=DG$; perciò EAGD è un rombo ed $ED=AG=\delta$, come ec.

La 2.ª intersezione determina una nuova trasversale soddisfacente *Cde*. Si hanno quattro soluzioni quando AG è di tal grandezza, che il circolo NGL incontri anche l'iperbola opposta $G'A'g'$, ed in tal caso esiste una trasversale che passando per G taglia i lati dell'angolo $I'Fi'(=\pi - I\hat{B}M)$.

§. 443 Per ottenere la più completa e generale costruzione di qualsivoglia eq. di 4.° grado $x^4 + ax^2 + bx + c = 0$, giova prescegliere la parabola $my = x^2 + nx$, ricavarne $x^4 = (my - nx)^2$, e sostituire questa espressione nella proposta, il che dà

$$m^2 y^2 - 2mnxy + (a + n^2)x^2 + bx + c = 0 ,$$

cioè un'eq., che in forza delle indeterminate m, n, si riferisce ad infinite curve di 1.° genere. Per darle tutta l'estensione possibile,

se ne tolga un moltiplice $mp(my-x^2-nx)$ dell'eq. ausiliare, e si vedrà che la trasformata

$$m^2y^2-2mnxy+(a+n^2+mp)x^2+(b+mnp)x-m^2py+c=0\;\ldots\;(1)$$

si riferisce all'ellisse o all'iperbola, secondo che sia $a+mp>$ ovvero <0; alla parabola se $a+mp=0$; al circolo qualora si abbia $n=0$ e $p=m-\frac{a}{m}$ (*)

Attesa l'identità delle ascisse, le curve comprese nell'eq. (1) incontrano tutte la parabola ausiliare negli stessi punti: perciò due di esse soddisfanno alla costruzione richiesta. Un'eq. di 4.° grado si costruisce dunque per mezzo della parabola combinata con una delle curve coniche, e per mezzo di due qualunque di tali curve purchè non sieno due circoli, i quali, siccome ammettono due sole intersezioni (441) non possono soddisfare generalmente ad un'eq. le cui risolventi sono quattro (§. prec.) L'eq. $x^3+ax+b=0$ si tratta nella stessa guisa

(*) In tal caso l'eq. (1) è

$$y^2+x^2+\frac{bx}{m^2}-\left(m-\frac{a}{m}\right)y=-\frac{c}{m^2}$$

ed aggiungendo $\frac{1}{4}\left(m-\frac{a}{m}\right)^2+\frac{b^2}{4m^4}$ si cangia in

$$\left(y-\tfrac{1}{2}m+\frac{a}{2m}\right)^2+\left(x+\frac{b}{2m^2}\right)^2=\tfrac{1}{4}\left(m-\frac{a}{m}\right)^2+\frac{b^2}{4m^4}-\frac{c}{m^2}\;;$$

eq. che facendo $y-\frac{1}{2}m+\frac{a}{2m}=u$, $x+\frac{b}{2m^2}=t$,

$\frac{1}{4}\left(m-\frac{a}{m}\right)^2+\frac{b^2}{4m^4}-\frac{c}{m^2}=a^2$, diviene $u^2=a^2-t^2$.

Sostituendovi $my-nx$ per x^2 si ha la 2.ª eq. ausiliare

$$mxy-nx^2+ax+b=0,$$

e sottraendo $p(my-x^2-nx)$ si ottiene l'eq. iperbolica

$$mxy+(p-n)x^2+(a+np)x-mpy+b=0.$$

Giova però moltiplicare la proposta per x e trattare la nuova eq. col metodo sopra esposto. L'intersezione soprabondante cade nell' origine e si determina facilmente.

Un' eq. di 5.° grado, dopo averla moltiplicata per x, si costruisce con una curva di 2.° ed una di 3.° grado. In generale, se il massimo esponente m della proposta è un n.° primo, se ne fa la moltiplicazione per x^k, dove k sia il minimo n.° intiero possibile, e tale che possano aversi due n.ⁱ n', $\frac{m+k}{n'}$, i quali presentino la minima possibile differenza.

Nella scelta delle curve ausiliari deesi aver riguardo, non tanto alla semplicità dell' eq. e dell' ordine, quanto alla facilità del metodo che si ha per descriverle, poichè l'eq. altro non è che un segno il quale ci guida nel calcolo, ed in sostanza la soluzione dipende dalla descrizione della curva.

§. 444. Quando, due date curve di 1.° genere s'incontrano in due punti, sovente giova conoscere l'eq. della retta che li congiunge.

Trattandosi di due circoli

$$y^2+x^2=r^2,\ (y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r'^2,$$

basta sottrarre la 2.ª eq. dalla 1.ª per avere

$$2\beta y+2\alpha x=r^2-r'^2+\beta^2+\alpha^2,$$ eq. richiesta.

Così l'eq.ⁱ paraboliche

$$y^2+dy+ex+f=0,\ y^2+d'y+e'x+f'=0,$$

danno $(d-d')y+(e-e')x+f-f'=0$.

Talvolta però è necessario un adattato artifizio ed in seg. ne daremo parecchi esempj.

Delle curve simili od affini, e delle curve uguali.

§. 445. Due curve si dicono *simili* quando le coordinate di una essendo x, y, quelle dell'altra sono mx, my. Tali sono le curve

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+F=0$$
$$Ay^2+Bxy+Cx^2+\frac{F}{m^2}=0.$$

La somiglianza è completa se alle respettive ascisse dell'una e dell'altra, proporzionali ai respettivi parametri a, a', corrispondono due ordinate, aventi fra loro il medesimo rapporporto $a:a'$; e lo stesso perciò si verifica delle rette e degli archi omologi. Infatti, attesa la necessaria omogeneità de' termini, la proposta eq. che supponiamo di 2.º grado, dev'essere della forma

$$y^2+xy+x^2+a(x+y)+a^2=0,$$

che non si altera mediante la sostituzione di $\frac{a}{m}$, $\frac{x}{m}$, $\frac{y}{m}$ per a, x, y.

Ciò succede per es.° nell' eq. del circolo $y^2=2ax-x^2$, in quella della parabola $y^2=ax$, ec., in conseguenza i circoli, le parabole, ec. sono curve simili.

Se le ascisse di due date curve stanno come $1:r$, le ordinate come $1:s$, le due curve diconsi *affini*. Fatta per es.° la sostituzione d' $\frac{x}{r}$ per x, e d' $\frac{y}{s}$ per y nell' eq. del circolo, si ottiene l' eq. ellittica

$$r^2y^2=2ars^2x-x^2.$$

Tutte l' ellissi sono dunque affini al circolo e fra loro.

L' eq. $y^2=ax$ diviene $y^2=\frac{as^2}{r}x$: perciò *le curve affini alla parabola sono parabole, simili alla curva principale e fra loro*. Lo stesso deesi dire delle iperbole espresse con l'eq.[i]

$$y^3=a^2x,\ y^3=ax^2,\ y^2x=a^3,\ \text{ec.}$$

Rapportando le iperbole coniche agli assi scuopresi ch' esse sono affini, e facilmente si vede che l' ellissi e le iperbole divengono le une simili all' altre quando i loro assi principali hanno lo stesso rapporto.

Se l'eq. della curva sia $F(x, y, a, b)=0$, le infinite curve provenienti dalla variazione

di un solo parametro posson'essere anche uguali: tali per es.° sono le curve $y=b+\sqrt{(2ax-x^2)}$, perchè qualunque variazione di b altro non fa che traslocare il centro del circolo $y=\sqrt{2ax-x^2}$, lungo una retta perpendicolare ad Ax.

Lo stesso avviene per rapporto alle curve espresse con un'eq. $F(x, y, a, b, c)=0$, ed $y=c+\frac{a}{b}\sqrt{(2ax-x^2)}$, facendo variar c, rappresenta un'infinita serie di ellissi, il cui centro è in una retta perpendicolare come sopra.

§. 446 Cerchiamo in qual modo possano esprimersi con una sola eq. tutte le curve $f(x, y, a)=0$, nell'ipot. che a varj gradatamente e le successive curve si trovino in una diversa posizione, dipendente da una data legge, e per maggior chiarezza proponiamoci un circolo. AMB (F.ª 125) il cui raggio$=a$, ed il diametro AB resti parallelo a se stesso, mentre il punto A della circonferenza (ovvero il centro C) descrive una data curva AaL, che chiameremo *direttrice*.

Il diametro AB prolungato sia l'asse Ax di AaL, $Ak=b$, $ak=\phi(b)=B$, funzione cognita. Condotta per a la parallela ad AB, è questa, cioè ab, il diametro del circolo il cui vertice corrisponde al punto a della direttrice. Da un punto m del predetto circolo si tiri l'ordinata rettangola $mP=u$ e sia $AP=t$. Facendo $ap(=x)=t-b$, $pm(=y)=u-B$;

siccome $(pm)^2=2a.ap-(ap)^2$, risulta

$$(u-B)^2=2a(t-b)-(t-b)^2,$$

eq. che in forza della variabile b rappresenta tutti i circoli AMB, *amb*, ec.

Qualunque sia la curva proposta altro non si richiede che sostituire nella sua eq. $t-b$ per x, $u-\mathrm{B}$ per y.

§. 447. Con la posizione della curva può supporsi variata quella dell' asse, e ciò a tenore di una data legge, per es.° 1.° che l' asse AB tenda sempre ad un determinato punto e si conservi da esso equidistante: 2.° che l' estremo A percorra una data curva direttrice AaL (F.ª 126) e l' angolo aQA sia una cognita funzione φ dell' ascissa Ak $(=b)$, corrispondente all' ordinata ortogonale ak della direttrice. Trattasi di trovar l' eq. fra le coordinate rettangole QP$(=t)$, mP $(=u)$ (F.ª 126 e 125) di qualunque punto m della curva mobile.

Sia (F.ª 126) $\mathrm{AQ}=a\mathrm{Q}=\alpha$, $\mathrm{A\hat{Q}}a=\theta$, $mp(=y)$ perpendicolare ad ab, che si suppone essere l' asse AB trasferito a seconda della 1.ª legge sopra indicata, Ps parallela a Qb, prolungata sino alla mp in s, Pc parallela a ps. Dal trigono PQc si ha Pc ossia $ps=t\,sen.\theta$, e Qp—Ps ossia $\mathrm{Q}c=t\cos.\theta$. Dal trigono mPs, dove $\mathrm{P}\hat{m}s=\theta$, risulta $\mathrm{P}s=u\,sen.\theta$ ed $ms=u\cos.\theta$; quindi

$$\mathrm{Q}p=t\cos.\theta+u\,sen.\theta\ ,\ mp=u\cos.\theta-t\,sen.\theta\ ;$$

e perchè $\mathrm{Q}p=\alpha+x$, $mp=y$, si ha

$$x=t\cos.\theta+u\,sen.\theta-\alpha\ ,\ y=u\cos.\theta-t\,sen.\theta,$$

ed altro non resta che sostituire quest' espres-

sioni nella data eq. $f(x,y,a)=0$ della curva AMB.

Nella 2.ª ipot. abbiamo (F.ª 125)

$$KQ=\frac{\varphi(b)}{tan.\theta},\ Qa=\frac{\varphi(b)}{sen.\theta};$$

$$QP(=AK+KQ-AP)=b+\frac{\varphi(b)}{tan.\theta}-t;$$

$$ps(=Pc)=QPsen.\theta=b\,sen.\theta+\varphi(b)cos.\theta-t\,sen.\theta;$$

$$x(=Qa-Qp)=\frac{\varphi(b)}{sen.\theta}-(Qc+Ps)=\frac{\varphi(b)}{sen.\theta}-QPcos\theta-usen.\theta$$

$y(=ms-ps)=u\,cos.\theta-bsen.\theta-\varphi(b)cos.\theta+tsen.\theta$, cioè

$$x=(t-b)\,cos.\theta-(u-\varphi(b))sen.\theta,$$

$$y=(t-b)\,sen.\theta+(u-\varphi(b))cos.\theta$$

Per dare un es.º della variazione relativa ad un parametro, si concepisca un indefinito n.º di circonferenze circolari AM, A,M, A,M ec. condotte per uno stesso punto p (F.ª 127) ed aventi il centro C in una data retta LN. Sia la perpendicolare MP$=p$, mp (ord. rettang.)$=y$, P$p=x$, MC$=r$, e siccome CP$=\sqrt{r^2-p^2}$, si avrà

$y^2+x^2+2x\sqrt{r^2-p^2}=p^2$,

eq. che attesa l'indeterminata p, rappresenta tutti i circoli di cui sopra.

Delle curve il cui ordine è superiore al 2.°

§. 448 La formola delle curve di 3.° grado, altrimenti dette di 3.° ordine e di 2.° genere, è

$$Ay^3+By^2x+Cyx^2+Dx^3+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Ix+L=0 \ldots (A)$$

ossia $y^3+(a+bx)y^2+(c+dx+ex^2)y+fx^3+gx^2+hx+i=0 \ldots (a)$

Siccome l'eq. $Ay^3+By^2x+Cyx^2+Dx^3=0$ ha per lo meno una risolvente reale (*) l'eq. (A) può mettersi sotto la forma

$$(A'y^2+B'xy+C'x^2)(a'y-b'x)+Ey^2+Fxy+Gx^2+Hy+Ix+L=0$$

e questa, facendo $y=\frac{a't+b'u}{c'}$, $x=\frac{a'u-b't}{c'}$, si cangia in

$$\alpha u^2 t+\beta ut^2+\gamma u^2+\delta ut+\varepsilon u+\zeta t^3+\eta t^2+\vartheta t+k=0 \ldots (a')$$

eq. ugualmente generale, e che contiene cinque soli termini affetti da u; termini per rap-

(*) Fatto il cubo dell'eq. $x=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$ si ha

$$x^3=y+3\sqrt[3]{yz}(\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z})+z,$$

ossia $x^3-3\sqrt[3]{yz}\,.\,x=y+z \ldots (1)$; eq. che dovendo restare soddisfatta dall'ipot. su cui è fondata, ha una risolvente reale $x=\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}$: d'altronde sempre si può soddisfare al sistema $3\sqrt[3]{yz}=p$, $y+z=q$, ricavando $yz=\frac{1}{27}p^3$, indi $(y+z)^2-4yz$ ossia $(y-z)^2$, ed ogni eq. $x^3+ax^2+bx+c=0$, facendo $x=y-\frac{1}{3}a$ diviene della forma $x^3-px+q=0$. Dunque l'eq. (1) rappresenta qualsivoglia eq. cubica e però ec.

porto ai quali possono farsi 31 ipot., cioè che ne manchi uno, che ne manchino due, tre, quattro. Un' adattata trasformazione riduce (369) tutte l'eq.[i] anzidette a quattro formole, cioè:

$$\alpha' u^2 t + \varepsilon' u + \zeta t'^3 + \eta' t^2 + \theta' t + k' = 0 \ldots . (A')$$

$$\delta' t u + \zeta' t^3 + \eta' t^2 + \theta' t + k' \qquad = 0$$

$$\gamma' u^2 + \zeta' t^3 + \eta' t^2 + \theta' t + k' \qquad = 0$$

$$\varepsilon' u + \zeta' t^3 + \eta' t^2 + \theta' t + k' \qquad = 0:$$

Può consultarsi una mem.[a] di *Nicole* (Accad. di Parigi 1729) dove quest'argomento è trattato con accuratezza.

Leonardo Euler (Introd. in Anal. Inf. Parv. T. 2.° Cap. 9) considerando il n.° e la natura degli assintoti è giunto a distinguere le curve di 3.° grado in 16 *generi*, ed ha assegnato per ciascuno la corrispondente eq. I predetti 16 generi comprendono le 72 *specie* riconosciute da *Newton* (Enumerat. Lin. tertii ord.), n.° d'altronde incompleto, e relativo alla varia forma delle respettive curve in uno spazio finito.

É un caso particolare del 14.° genere Euleriano la curva contemplata da *Giacomo Bernoulli* (Op. T. 2.° *p.* 540) la di cui eq. è $a^2 y - y^3 = a x^2$. Essa dee la sua rinomanza ad uno stravagante concetto del prelodato Geometra, concetto da lui espresso coi seg. termini: *Nec absurdum est unam eamdemque numero magnitudinem in pluribus locis discretis et separatis simul existere. Sic duo curvæ,*

non obstante intervallo quo dirimuntur, nonnunquam constituunt unam eamdemque curvam, qualis est quæ exprimitur per $a^2y - y^3 = ax^2$.

A questo propósito fu osservato da *Cramer* che *Bernoulli* confuse il segno con la cosa significata.

Ecco le formole de' 16 generi *Euleriani*.

I ... $y(x^2-2mx+n^2y^2)+ay^2+bx+cy+d=0$
dove $m^2<n^2$ e $b>$ ovv. <0.

II ... $y(x^2-2my+n^2y^2)+ay^2+cy+d=0$
dove $m^2<n^2$.

III ... $y(x-my)(x-ny)+ay^2+bx+cy+d=0$
non essendo $m=n$, nè $b=0$, nè $mb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2}=0$,
nè $nb+c+\frac{a^2}{(m-n)^2}=0$

IV ... $y(x-my)(x-ny)+ay^2+cy+d=0$
purchè non sia $m=n$ nè $c+\frac{a^2}{(m-n)^2}=0$

V ... $y(x-my)(x-ny)+ay^2-\frac{a^2y}{(m-n)^2}+d=0$
{ m non $=n$ }

VI ... $y^2(x-my)+ax^2+bx+cy+d=0$
purchè non $a=0$ nè $2m^3a^2-mb-c=0$

VII ... $y^2(x-my)+ax^2+bx+m(2m^2a^2-b)y+d=0$
{ a non $=0$ }

VIII ... $y^2(x-my)+b^2x+cy+d=0$
{ non $b=0$ nè $c+mb^2=0$ }

IX ... $y^2(x-my)+b^2x-mb^2y+d=0$ { non $b=0$ }

X ... $y^2(x-my-b^2x+cy+d=0$
{non $b=0$ nè $c-mb^2=0$ }

XI... $y^2(x-my)-b^2x+mb^2y+d=0$ {non $b=0$}

XII... $y^2(x-my)+cy+d=0$ [non $c=0$]

XIII... $y^2(x-my)+d=0$

XIV... $y^3+ax^2+bxy+cy+d=0$ [a non $=0$]

XV ... $y^3+bxy+cy+d=0$

XVI... $y^3+ay+bx=0$ [non $b=0$] (*)

§. 449. Per mostrare come deesi procedere nella discussione delle curve di 3.° grado, sia

Es.° 1.° La curva $xy^2-ay=bx^3+cx^2+dx+e$, la quale non differisce da quella espressa con l'eq. (A).

Posta l'origine in A(F.ª 128) sieno Ax, Ay, gli assi rettangoli, e si vedrà che la formola
$y=\{{}^1\!/_2a\pm\sqrt{(bx^4+cx^3+dx^2+ex+{}^1\!/_4a^2)}\}:x$
dà due valori PM, Pm; che quando $x=0$ il 1.° diviene infinito e coincide con l'assintoto Ay, il 2.° è finito ed espresso dall'ordinata Aμ. Siccome la PM risulta infinita anche quando è tale la x, i valori d'x fra o ed ∞ somministrano per y una serie di valori, che dall'∞ in A decresce sino ad un certo punto B, per riprendere nuovi aumenti all'infinito. Il valore negativo Pm decresce da Aμ sino ad un certo punto b, aumentasi indefinitamente al di là di esso.

Fatto $x<0$, le pM, pm, negative diseguali, divengono identiche in α, dove coincidono con

(*) D'onde mai proviene che *Cramer* trova 14 soli generi? Il celebre Cav. *Ruffini* soddisfarà con un metodo generale sulla classificazione delle curve, a questa difficile dimanda.

la tangente αQ; e si sa (§.422 lin.6.ª) che le ordinate uguali corrispondono alle quattro risolventi reali Aα, Aβ, Aγ, Aδ, dell' eq.

$$bx^4-cx^3+dx^2-e+{}^1/_4a^2=0.$$

Esse sono immaginarie nell' intervallo de' punti α, β; γ, δ; reali fra β, γ. Al di là del punto δ un' ordinata cresce all' infinito, l'altra all' infinito diminuisce. È facile il concepire la formazione dell' *ovale* R.

Es.° 2.° La curva data essendo

$$ay^2-x^3+(b-c)x^2+bcx=0$$

se ne deduca $y=\pm\sqrt{\frac{x(x-b)(x-c)}{a}}$,

e si vedrà ch' ella è dotata di due rami simili BV, BV' (F.ª 129) da ambe le parti dell' asse Ax; che le ordinate sono immaginarie quando la x è positiva $<b$ ($=$AB); che sono reali dalla parte contraria da $x=0$ sino ad $x=-c$ ($=$AC); che al di là di $-c$ riprendono il valore immaginario. Basta dare ad x un sufficiente n.° di valori consecutivi per ravvisare la forma tracciata nella fig.ª ; l' indefinita estensione de' rami BV, BV', e l' esistenza di un' *ovale* AEC dalla parte delle x negative, ovale il cui diametro AC è $=c$.

Supponendo $c=0$ la proposta diviene $ay^2-x^3+bx^2=0$, e dà $y=\pm\, x\sqrt{\frac{x-b}{a}}$; espressione immaginaria quando $x<0$ ovvero >0 e $<b$; $=0$ quando è tale la x.

Il punto A dove le x, y svaniscono insieme, siccome soddisfa all' eq., appartiene alla curva quantunque solo e dicesi *coniugato*.

Per es.° l' eq. $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=0$ non rappresenta che quattro degli anzidetti punti, situati ne' respettivi quattro angoli degli assi; mentre $(x^2-a^2)^2+(y^2-b^2)^2=c^4$ si riferisce a quattro curve rientranti, poste come sopra.

Per concepire onde il punto A tragga l' origine, riflettasi che l' ovale AEC si ristringe per gradi a misura che c diminuisce.

Facendo $b=0$ si ha $ay^2-x^3-cx^2=0$, e da questa eq. apparisce che i rami BV, BV', passano per A e formano un *nodo* insiem coll' ovale (F.ª 130) Diminuiscasi progressivamente anche c, e si vedrà che la *foglia* AEC si ristringe e sparisce quando $ay^2-x^3=0$. Questa dà $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{a}}$; perciò la curva ha due rami dalla parte delle x positive (F.ª 131) ed a suo luogo vedremo che il punto A è un punto di *regresso a cuspide*, qual trovasi espresso nella fig.ª cit. (*)

§. 450. Tralasciata l' infeconda e spinosa teorica delle curve di 4.° grado, argomento che scoraggì l'immortale Geometra di *Wolstrop*, che quasi inutilmente stancò l' infaticabile *Bragelogne*, e mal corrispose agli sforzi

(*) Dopo il profondo ed enimmatico saggio di *Newton* (*Enumeratio linearum tertii ord.*) opera diciferata da *Stirling* ed estesa da *Maclaurin* nella sua *Geom. Organ.*ca, si sono distinti nella trattazione di questo argomento, *Nicole* (Acad. des Sc. de Paris 1729), *Euler* (*Introd. in Anal. Inf. Parv.* T. II.) e *Cramer* (*Introd. à l' Analdes Lignes courbes*).

dell' *Eulero* e di *Cramer*, ci limitiamo ad osservare 1.° che una curva del grado sopra indicato può esser dotata di otto rami anche infiniti, spettanti a quattro curve distinte, che in conseguenza essa, nel più ampio suo significato, rappresenta un sistema di curve: 2.° che una costruzione analoga a quella del §. 445 sovente riesce opportuna per discuoprirne l' andamento e le modificazioni.

É per es.° dotata di otto rami la curva

$y^4 - 2x^2 y + x^4 - a^2 x^2 + b^4 = 0$ che dà

$$y = \pm \sqrt{x^2 \pm \sqrt{(a^2 x^2 - b^4)}}:$$

Ricavasi l' andamento espresso con la Fig.ª 132 discutendo l'eq.

$y^4 - 96\, a^2 y^2 + 100\, a^2 x^2 - x^4 = 0$, da cui

$$y = \pm \sqrt{[48\, a^2 \pm \sqrt{(x^4 - 100\, a^2 x^2 + 2304\, a^4)}]} =$$

$$\pm \sqrt{[48 a^2 \pm \sqrt{((x-6a)(x+6a)(x-8a)(x+8a))}]}$$

Si trova per es.°

$$AD = 4a\sqrt{6},\ AE = 6a,\ AG = 8a,\ GH = 4a\sqrt{3}.$$

§. 451 Le respettive eq.ⁱ delle curve coniche dell'ordine $m+n-1$ sono:

Parabola $[\ y^{m+n} = a^m x^n$ ...... (A)

Ellisse $[\ y^{m+n} = \mu(a+x)^m (xa-)^n$...(B)

Iperbola. $[y^{m+n} = \mu(x+a)^m (x-a)^n$...(C)

$$\mu = \frac{b^{m+n}}{a^{m+n}}$$

Diconsi di 1.° genere se $m+n$ è pari; di 2.° se dispari.

Gen.[re] I Siccome dev' essere $m=2\varphi+1$ ed $n=2\omega+1$, ovvero $m=2\varphi$ ed $n=2\omega$, facendo nel 1.° caso

$$2\varphi+2\omega+2=2k \text{ e } \mu^{\frac{1}{2k}}\left(=\frac{b}{a}\right)=\nu,$$

si hanno per y due valori reali ed eguali, cioè

$$y=\pm\left(a^{2\varphi+1}x^{2\omega+1}\right)^{\frac{1}{2k}} \ldots\ldots (A')$$

$$y=\pm\nu\left[(a+x)^{2\varphi+1}(a-x)^{2\omega+1}\right]^{\frac{1}{2k}} \ldots (B')$$

$$y=\pm\nu\left[(x+a)^{2\varphi+1}(x-a)^{2\omega+1}\right]^{\frac{1}{2k}} \ldots (C')$$

Nel 2.° caso, posto $2\varphi+2\omega=2k$,

$$y^{2k}=a^{2\varphi}x^{2\omega} \ldots\ldots\ldots (A'')$$

$$y^{2k}=\mu(a+x)^{2\varphi}(a-x)^{2\omega} \ldots (B'')$$

$$y^{2k}=\mu(x+a)^{2\varphi}(x-a)^{2\omega} \ldots (C'')$$

eq.[i] che si deprimono con l'estrazione della radice quadrata finchè almeno un esponente del 2.° membro sia dispari: allora o l'altro è tale e l'eq. spetta al caso prec.; o è pari, e la somma di quelli del 2.° membro, somma equivalente all'esponente d'y, è dispari, e la curva si riferisce al 2.° genere di cui in seg.

Se $m=n$ si hanno le coniche Apolloniane.

Ciò posto si vede che quando $x=+x$, l'eq. (A') dà due valori reali d' y, che gli dà immaginarj quando $x=0$, eguali a $\pm a$ quando $x=a$. Per conseguenza la parabola dell'ordine $m+n-1$ e di 1.° genere, che dicesi anche *quadrato-quadrata*, ha due rami infiniti; simili e similmente situati, ne' respettivi angoli $\hat{xy}$, $x.\hat{-y}$.

Facendo in (B) $x=a-t$ la y riceve due valori reali ed eguali di segno diverso. Le ipotesi $x=\pm a$, $x=\pm(a+t)$, $x=0$, respettivamente somministrano $y=0$, y immag.^{a}, $y=\pm\ \nu a=\pm b$ asse coniugato. Dunque l'ellisse dell'ordine $m+n$ e di 1.° genere, è finita e rientrante, composta di due rami simili e posti similmente per rapporto ad Ar, e ciascuna delle due ordinate centrali eguaglia il semiasse coniugato.

Le ipot. $x=\pm(a-t)$, $x=\pm(a+t)$ in (C') danno respettivamente la y immaginaria, un doppio valore reale per y, valore che rendesi identico se $\varphi=\omega$ ossia $m=n$, il che succede nell' iperbola Apolloniana. Dunque l' iperbola dell' ordine $m+n-1$ e di 1.° genere ha due rami simili ne' respettivi angoli $\hat{xy}$, $x.\hat{-y}$; due altri simili fra loro ma non coi primi, negli angoli $-\hat{x.y}$, $-x.\hat{-y}$. La distanza fra l' una e l' altra coppia di rami è $=2a$.

Gen.^{re} II Essendo $m=2\varphi$ ed $n=2\omega+1$, o vicev., si può supporre

$$m+n\ [=2(\varphi+\omega)+1]=2k+1\text{ , e fatto }\mu^{\frac{1}{2k+1}}=\nu,$$

si hanno l' eq.[i] (A'), (B'), (C') sotto la forma

$$y=\left(a^{2\varphi}x^{2\omega+1}\right)^{\frac{1}{2k+1}}\;.\;.\;.\;.\;('A)$$

$$y=\nu[(a+x)^{2\varphi}(a-x)^{2\omega+1}]^{\frac{1}{2k+1}}...('B)$$

$$y=\nu[(x+a)^{2\varphi}(x-a)^{2\omega+1}]^{\frac{1}{2k+1}}...('C)$$

ed appartengono alla 1.[a] specie.

L' eq.[i] relative al 2.° caso sono

$$y=\left(a^{2\omega+1}x^{2\varphi}\right)^{\frac{1}{2k+1}}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(''A)$$

$$y=\nu[(a+x)^{2\omega+1}(a-x)^{2\varphi}]^{\frac{1}{2k+1}}...(''B)$$

$$y=\nu[(x+a)^{2\omega+1}(x-a)^{2\varphi}]^{\frac{1}{2k+1}}...(''C)$$

Per discutere l' ellissi fà d' uopo sostituire $\pm(a\pm t)$ per x e contemplare le forme sotto le quali l' eq. ('B) comparisce qualora vi si faccia

$$x=a-t,\; x=-(a-t),\; x=a+t,\; x=-(a+t).$$

Siccome (''B) si cangia in ('B) quando si sostituisce $-x$ ad x, le due ellissi di 1.[a] e 2.[a] specie costituiscono una sola curva. Succede lo stesso per rapporto all'ellisse ed all' iperbola di 2.° genere perchè ('C) si cangia in ('B) mettendo $-y$ per y. Il 1.° genere comprende dunque la parabola, l' ellisse e l' iperbola: spet-

tano al 2.° genere la parabola e l'ellisse, o l'iperbola e la parabola: quest' ultima si distingue in 1.ª e 2.ª parabola *cubica*.

§. 452. Avendosi una curva dell'ordine n.esimo,

$$y^n + (a+bx)y^{n-1} + (c+dx+ex^2)y^{n-2} \ldots + p + qx + rx^2 \ldots + vx^n = 0,$$

se si fa (369) $x = hu$ ed $y = \beta + t + ku$, ottiensi

$$t^n + [n(\beta + ku) + a + bhu]\, t^{n-1} \ldots = 0.$$

Ma sempre si può soddisfare all'eq.

$$n(\beta + ku) + a + bhu = 0$$

con fare $nk + bh = 0$, $n\beta + a = 0$. Dunque l'eq. di qualsivoglia curva si può trasformare in un' altra in cui la somma delle ordinate positive eguagli quella delle negative (*); e perchè può cangiarsi anche Ay, il che fa variare il diametro, *qualsivoglia curva ammette un infinito n.° di diametri semplici*.

Il n.° de' termini componenti l'eq. generale sopra esposta essendo

$$= 1 + 2 + 3 \ldots + (n+1) = \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2),$$

quello de' punti che si richiedono per determinarla è

$$= 0 > \tfrac{1}{2}n(n+3) \left[= \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) - 1\right].$$

Siccome il calcolo algebrico altro non porge che un informe e complicato abbozzamento delle curve trascendenti, ne riserbiamo la teorica alla matematica sublime.

(*) Il fondamento di questa proposizione per incidenza accennata, sulla traccia del §. 89 lin. penult., sarà fra poco rigorosamente stabilito.

ARTICOLO III.

TEORICA ELEMENTARE DELLE SUPERFICIE CURVE.

INTRODUZIONE.

§. 453. Le superficie si distinguono in ordini come le linee; è del 1.° il piano (355); sono del 2.° quelle la cui più generale eq. ha la forma

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+B'xz+B''yz+C'z^2+Dy+Ex+E'z+F=0\ldots(A)\ (*)$$

Si riferisce al 3.° ordine ogni superficie espressa con un' eq., ove la massima dimensione delle coordinate sia la 3.ª e così in seg.

In forza dell' eq. assegnata, che, per abbracciare tutti gli ordini, indichiamo col simbolo $F(x, y, z)=0$, una coordinata è funzione delle altre due, e si ha per es.° $z=f(x, y)$: ma siccome innumerabili sono le combinazioni de' possibili valori d' x, y, non giova punto alla discussione delle superficie risolvere la $F=0$ per rapporto a z; è bensì a tal uopo opportuna la ricerca delle sezioni, fatte con una serie di

(*) I simboli prescelti per li coefficienti agevolano il regresso dalle superficie alle linee di 2.° grado. Basta sopprimere le lettere accentuate per ridurre l' esposta formola a quella delle curve di 1.° genere (367), e per ricavare dalle principali funzioni relative alle anzidette superficie, le funzioni analoghe spettanti alle curve indicate.

piani soggetti ad una data legge, giacchè la natura di esse e la maniera con cui succedonsi, caratterizzano la forma e l'andamento della superficie a cui spettano.

Sia per es.° $x^2+y^2+z^2=r^2$, eq. ch'è il simbolo di tutti i punti dello spazio, situati alla distanza r dall' origine (344) e per conseguenza appartiene ad una superficie sferica il cui centro è nell' origine stessa.

Per esprimere che l'anzidetta superficie è tagliata con un piano $z=h$ parallelo ad xy, si assuma la prec. insieme con la proposta, e la risultante $x^2+y^2=r^2-h^2$ rappresenterà la projezione sul piano xy della sezione richiesta; projezione la cui forma, atteso il parallellismo del piano segante, non differisce dalla sezione, ed è un circolo avente il centro nell'origine, il raggio $=\sqrt{(r^2-h^2)}$. Il piano segante tocca ovvero oltrepassa la sfera, secondo che $h=r$ ovvero $>r$. Nel 1.° caso, siccome $x^2+y^2=0$ suppone $x=0$ ed $y=0$, esso incontra ad angolo retto il raggio perpendicolare al piano xy.

La eliminazione di z fra la proposta ed un piano $Mx+Ny+Pz=0$, dà meno semplicemente.

$$(M^2+P^2)x^2+2MNxy+(N^2+P^2)y^2=r^2P^2,$$

cioè la projezione ellittica della sezione sul piano xy. Dunque *la projezione di un circolo su di un piano obbliquo è un' ellisse.*

Vedremo come dall' indole della projezione deducasi quella della sezione che sempre è circolare.

Posta in (A) una delle x , y , z ,$=$o si ha la sezione col piano coordinato che contiene le altre due. Così $z=$o dà la sezione col piano xy , e la sua eq. essendo

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

cioè l'eq. (a) del §. 367 , si vede ch'ella può essere una qualunque delle curve di 1.° ordine.

Per riconoscere i limiti di una superficie basta trovar quelli delle sue sezioni, e questi dipendono da' limiti delle projezioni. Di ciò in seguito. Intanto ci proponiamo d'investigare le principali modificazioni che possono competere al generico significato dell' eq. (A).

§. 454 Trattando la z come l'incognita si ha

$$z=-\left(\frac{B'x+B''y+E'}{2C'}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{(B'x+B''y+E')^2}{4C'^2}-\frac{1}{C'}(Ay^2+Cx^2+Bxy+Ex+Dy+F\right]}$$

e fatto per comodo

$$B''^2-4AC'=e\,,\ 2(BB'-2C'B)=f\,,\ B'^2-4CC=g\,,$$

$$2(B''E'-2C'D)=h\,,\ 2(B'E'-2C'E)=i\,,\ E'^2-4C'F=l$$

$$z=-\frac{1}{2C'}(B'x+B''y+E)\pm\frac{1}{2C'}\sqrt{[ey^2+fxy+gx^2+hy+ix+l]}\ldots(B)$$

Dunque ad ogni valore d' x , y , dentro certi limiti da determinarsi, corrispondono due punti della superficie. Bisogna però che il radicale non sia immaginario, e ciò succede in alcune circostanze che passiamo a notare.

Posto $x=$o può darsi ad y un tal valore che il segno di ey^2+hy+l dipenda da quello di

e (*) e fra i possibili valori d'y evvi $y=0$: Dunque due condizioni della generale immaginarietà di z vengono costituite dai rapporti $B'^2<4AC'$; $E^2<4C'F$.

Affinchè la funzione sotto il segno radicale sia costantemente negativa bisogna che non esista alcun reale valore che ne verifichi l'evanescenza, e però se fassi $=0$, dee dare, qualunque sia x, un valore immaginario per y: ma risolvendo l'eq. onde si tratta si ritrae

$$y=-\frac{1}{2e}\left\{fx+h\pm\sqrt{[(fh-2eg)x^2+2(fh-2ei)x+h^2-4el}\right\}$$

e l'ipot. $x=0$ lascia sotto il segno la quantità h^2-4el: dunque dev'essere $h^2-4el<0$.

Facendo $=0$ la funzione sotto il prec. segno radicale si ha

$$x=-\frac{1}{f^2-4eg}\left\{(fh-2ei\pm\sqrt{[(fh-2ei)^2-(f^2-4eg)(h^2-4el)]}\right\}$$

e questa espressione è immaginaria se $f^2-4eg<0$ perchè tale si suppone h^2-4el; e se

$$(fh-2ei)^2<(f^2-4eg)(h^2-4el).$$

Dunque le condizioni da cui dipende che l'eq. (A) sia insignificante si riducono alle seguenti:

$$e<0,\ l<0,\ h^2-4el<0,\ f^2-4eg<0,\ (fh-2ei)^2<(f^2-4eg)(h^2-4el).$$

L'eq. stessa si riferisce al sistema di due piani se (B) sia della forma $\pm Lx\pm My+Nz+P=0$,

(*) Basta fare $y=1+\frac{m}{e}$, dove $m>h$ e $>l$, per avere $ey^2=\frac{my^2}{y-1}$: quindi $ey^2>\frac{m(y^2-1)}{y-1}$ e però $ey^2>m(y+1)>hy+l$.

e per questo si richiede che la funzione sotto il segno radicale in (B) equivalga a $(\mu x+\nu y+\pi)^2$: dunque

$$[\mu^2=e, \nu^2=g, \pi^2=l, 2\mu\nu=f, 2\mu\pi=h, 2\nu\pi=i] \ldots (C)$$

Perciò

$$[f^2-4eg=0, h^2-4el=0, i^2-4gl=0, fh-2ei=0] \ldots (D)$$

ed in conseguenza e, g, l, debbon' avere lo stesso segno.

Sussistendo le prime tre delle (D), giacchè la 4.ª ne deriva, (B) diviene

$$2C'z-B'x-B''y+E \pm (y+x\sqrt{\tfrac{g}{e}}+\sqrt{\tfrac{l}{e}})\sqrt{e}=0. (E)$$

e rappresenta due piani se i n.ⁱ e, g, l, sono positivi; altrimenti la (E) si spartisce nelle due

$$2C'z-B'x-B''y+E=0, y+x\sqrt{\tfrac{g}{e}}+\sqrt{\tfrac{l}{e}}=0$$

e la proposta appartiene ad una retta. Siccome la funzione $ey^2+fxy+gx^2+hy+ix+l$ equivale ad

$$\frac{1}{4e}\left\{(2ey+fx+h)^2-\frac{1}{e'}(e'x+f')^2+\frac{Q}{e'}\right\}$$

dove $e'=f^2-4eg$, $f'=fh-2ei$,

$$Q=(fh-2ei)^2-(f^2-4eg)(h^2-4el),$$

l'eq, (B), trasponendo e facendo il quadrato, prende la forma

$$(2C'z+B'x+B''y+E)^2-\frac{1}{4e}(2ey+fx+h)^2+\frac{1}{4ee'}(e'x+f')^2-\frac{Q}{4ee'}=0.$$

Se $Q=0$, $e<0$, $e'<0$, essa non può restar soddisfatta senza che ciascun suo termine svanisca. Dunque

$$2C'z+B'x+B''y+E=0,\ 2ey+fx+h=0,\ e'x+f'=0;$$

e perchè queste danno per x, y, z, un valore lineare la proposta si riferisce ad un punto.

Teorica generale delle superficie di 2.° ordine (*)

§. 455. Sieno (F.ª 133 Tav. 3.ª) AP$(=x)$, Pm $(=y)$, Mm $(=z)$ le coordinate rettangole di un punto M; At, Au, Av, tre nuovi assi dati di posizione. Condotta la Mm' parallela ad Av, che incontri in m' il piano tu, si concepisca la $m'm''$ parallela ad Au, onde

$$Am''=t,\ m''m'=u,\ Mm'=v.$$

Se per m, m', m'' si fanno passare i piani verticali ml, $m'l'$, $m''l''$, dicendo δ', δ'', δ''', la respettiva distanza fra 'l 1.° ed il 2.°, fra 'l 2.° ed il 3.°, fra 'l 3.° ed yz, risulta AP$=\delta'+\delta''+\delta'''$ (somma delle projezioni di t, u, v su di Ax): ma

(*) La *Teoria delle superficie di 2.° ordine* del Sig. *Gaetano Giorgini* è fra le analoghe produzioni moderne quella, che abbiamo con maggior premura e soddisfazione consultata.

$$\delta'=v\cos.\hat{v.x}\ ,\ \delta''=u\cos.\hat{u.x},\ \delta'''=t\cos.\hat{t.x}:$$

Dunque $x=t\cos.\hat{t.x}+u\cos.\hat{u.x}+v\cos.\hat{v.x}$;

e perchè ciascun asse può indifferentemente riguardarsi come asse delle ascisse, si ha il sistema

$$\left.\begin{array}{l} x=t\cos.\hat{t.x}+u\cos.\hat{u.x}+v\cos.\hat{v.x} \\ y=t\cos.\hat{t.y}+u\cos.\hat{u.y}+v\cos.\hat{v.y} \\ z=t\cos.\hat{t.z}+u\cos.\hat{u.z}+v\cos.\hat{v.z} \end{array}\right\}\ldots(F)$$

Qualunque sia la reciproca inclinazione de' nuovi assi sussiste (350) il seg.

$$\left.\begin{array}{l} \cos.^2\hat{t.x}+\cos.^2\hat{t.y}+\cos.^2\hat{t.z}=1 \\ \cos.^2\hat{u.x}+\cos.^2\hat{u.y}+\cos.^2\hat{u.z}=1 \\ \cos.^2\hat{v.x}+\cos.^2\hat{v.y}+\cos.^2\hat{v.z}=1 \end{array}\right\}\ldots(G)$$

sistema, a cui (§. cit.) può sostituirsene un altro, facendo $=1$ ciascuna colonna del 1.° membro. Basta osservare che in

$$\cos.^2\hat{t.x}+\cos^2\hat{u.x}+\cos.^2\hat{v.x}=1$$

la retta x (ossia Ax) sta in vece di R. Dicasi lo stesso degli altri due sistemi.

Se l'angolo de' nuovi assi è dato debbono verificarsi (§. cit. form. 21) anche l'eq.[i] :

$$\left.\begin{array}{l} \cos.\widehat{t.x}\cos.\widehat{u.x}+\cos.\widehat{t.y}\cos\widehat{u.y}+\cos.\widehat{t.z}\cos\widehat{u.z}=\cos.\widehat{t.u}(=0) \\ \cos.\widehat{u.x}\cos.\widehat{v.x}+\cos.\widehat{u.y}\cos.\widehat{v.y}+\cos.\widehat{u.z}\cos.\widehat{v.z}=\cos.\widehat{u.v}(=0) \\ \cos.\widehat{t.x}\cos.\widehat{v.x}+\cos.\widehat{t.y}\cos.\widehat{v.y}+\cos.\widehat{t.z}\cos.\widehat{v.z}=\cos.\widehat{t.v}(=0) \end{array}\right\} (H)$$

il cui 2.° membro è zero (e tale lo supporremo quando non si avverta il contrario) se anche gli assi delle t, u, v, sono ortogonali tra loro. Si hanno pertanto fra i nove angoli delle t, u, v con le x, y, z, le sei eq.[i] (G), (H), e traslocando anche l'origine in un punto (α, β, γ) per lo che basta respettivamente aggiungere α, β, γ, al 2.° membro delle (F), vengono introdotti nell' eq. trasformata sei elementi arbitrarj, e servono alla eliminazione di un certo n.° di termini. Importa molto di rintracciare quali circostanze concorrano a modificare l' anzidetta operazione. Osserviamo intanto:

I Che sommando il quadrato dell' eq.[i] (F) si ha, in forza delle (G), (H)

$$x^2+y^2+z^2=t^2+u^2+v^2 \ldots. (h)$$

II Che per dedurre t, u, v in x, y, z, giova moltiplicare ciascuna delle (F) pel respettivo coefficiente di t, u, v, e sommare separatamente i prodotti. Così, attese le (G), (H), ottiensi

$$\left.\begin{array}{l} t=x\cos.\widehat{t.x}+y\cos.\widehat{t.y}+z\cos.\widehat{t.z} \\ u=x\cos.\widehat{u.x}+y\cos.\widehat{u.y}+z\cos.\widehat{u.z} \\ v=x\cos.\widehat{v.x}+y\cos.\widehat{v.y}+z\cos.\widehat{v.z} \end{array}\right\} \ldots (F')$$

III. Che sostituite in (h) l' espressioni (F'), il confronto de' termini dà

$$\left.\begin{array}{l} \cos.\widehat{t.x}\cos.\widehat{t.y}+\cos.\widehat{u.x}\cos.\widehat{u.y}+\cos.\widehat{v.x}\cos.\widehat{v.y}=0 \\ \cos.\widehat{t.x}\cos.\widehat{t.z}+\cos.\widehat{u.x}\cos.\widehat{u.z}+\cos.\widehat{v.x}\cos.\widehat{v.z}=0 \\ \cos.\widehat{t.y}\cos.\widehat{t.z}+\cos.\widehat{u.y}\cos.\widehat{u.z}+\cos.\widehat{v.y}\cos.\widehat{v.z}=0 \end{array}\right\} \text{(H)}$$

IV. Che mediante la supposizione $v=0$ nella trasformata, si ha la traccia sul piano tu, rapportata a due assi esistenti in detto piano.

V Che qualora l' eq. non contenga la potenza 1.ª di z, il piano xy divide la superficie in due parti eguali e simili, perchè ad ogni valore $+z$ di z ne corrisponde uno $=-z$. Per analogia (368) il piano xy dicesi *diametrale*. Vale lo stesso per rapporto ad y e ad x, e perciò se l'eq. è della forma

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q$$

tutti i piani coordinati sono diametrali, e diconsi *primarj* se s' intersegano ad angolo retto.

VI Che l' intersezione de' predetti piani è il *centro* della superficie, cioè un punto che bipartisce tutte le corde per esso condotte. Infatti, sostituendo per x, y, z le respettive espressioni (F), qualunque sieno $\widehat{t.u}$, $\widehat{t.v}$, $\widehat{u.v}$, si trova che a $\{t=0, u=0\}$ corrisponde

$$v=\pm\sqrt{\frac{Q}{M\cos.\widehat{v.x}+N\cos.\widehat{v.y}+P\cos.\widehat{v.z}}}$$

§. 456. Le formole (H), (h) (§. prec.) c' invitano a compiere la teorica spettante alla projezione delle superficie piane.

Una superficie piana S il cui contorno è qualunque, si suppone in A (F.ª 134), Au gli è perpendicolare, e π', π'', π''', sono le respettive projezioni di S sui piani rettangoli yz, xz, xy. Fatta la projezione di S in altro piano P, per es.° $\varphi\nu$. e condotta ad esso At perpendicolare, sussiste fra $\overset{\wedge}{u.x}$, $u.y$, $u.z$, $t.u$, la 1.ª delle (H). Si moltiplichi ciascun suo termine per S, di casi S' la projezione di S in $\omega\nu$, e siccome (320)

$$S\,cos.\,u.x=\pi',\ S\,cos.\,u.y=\pi'',\ S\,cos.u.z=\pi''',\ S\,cos.t.u=S',$$

la cit. eq. prende la forma

$$\pi' cos.t.x+\pi'' cos.t.y+\pi''' cos.t.z=S' \ldots . (1)$$

Data la projezione di S su tre piani rettangoli, e per rapporto ad essi la posizione di un 4.° piano P, la prec. eq. determina la projezione di S in P. Ciò posto si prenda $t\nu$ per nuovo piano di projezione, cui Aω sia perpendicolare, indi $t\omega$ cui sia perpendicolare Aν: dicansi S'', S''' le respettive projezioni

$$S\,cos.u.\omega,\ S\,cos.\nu.\omega,\ \text{di } S$$

su i piani $t\nu$, $t\omega$, e procedendo come sopra si avranno, mediante la 2.ª e la 3.ª delle (H). l' eq.ⁱ

$$\pi' cos.u.x+\pi'' cos.u.y+\pi''' cos.u.z=S'' \ldots (2)$$

$$\pi' cos.\nu.x+\pi'' cos.\nu.y+\pi''' cos.\nu.z=S''' \ldots (3)$$

che innalzate al quadrato, unitamente all'eq. (1), e sommate, danno, in forza delle (h)

$$S'^2+S''^2+S'''^2=\pi'^2+\pi''^2+\pi'''^2 \ldots (4),$$

risultamento interessante, e che si estende a qualunque n.° di superficie piane S, S_1, S_2 ec. sol che si faccia la respettiva somma delle projezioni esistenti su ciascun piano.

Dalle (1), (2), (3) si deduce altresì

$$\left.\begin{array}{l} S'cos.\hat{t.x}+S''cos.\hat{u.x}+S'''cos.\hat{v.x}=\pi' \\ S'cos.\hat{t.y}+S''cos.\hat{u.y}+S'''cos.\hat{v.y}=\pi'' \\ S'cos.\hat{t.z}+S''cos.\hat{u.z}+S'''cos.\hat{v.z}=\pi''' \end{array}\right\}\ldots (5)$$

formole che risolvono il probl. inverso di quello a cui servono le (1), (2), (3). Deriva dall' eq. (4)

1.° Che la somma $S'^2+S''^2+S'''^2$ è costante, qualunque sia la posizione de' primitivi piani di projezione, e si conserva inalterata mentre si passa da uno ad un altro sistema di piani rettangoli coordinati.

2.° Che una delle projezioni, per es.° S', diventa massima quando $S''=o$ ed $S'''=o$. Il piano $\omega\nu$ della *massima projezione* è molto importante nella Meccanica. (*)

(*) *Poisson* ha trattato questo bell'argomento con la solita sua profondità ed eleganza: (Traité de Mécanique T. I. pag. 103 e seg.)

§. 457. Facendo in (A)

$\{ y=m\lambda\delta+y_{,}, \; x=n\lambda\delta+x_{,}, \; z=\lambda\delta+z_{,} \;(346)\} \ldots (6)$ (*)

si ha la trasformata $\mu\delta^2+\nu\delta+\zeta=0 \ldots (7)$, dove

$$\mu=\lambda^2[Am^2+Bmn+Cn^2+B''m+B'n+C']$$

$$\nu=\lambda[(2Am+Bn+B'')y_{,}+(2Cn+Bm+B')x_{,} +(2C'+B''m+B'n)z_{,}+Dm+En+E'],$$

e ζ coincide con (A) accentuando x, y e z.

I reali valori di δ determinano i semmenti della trasversale (1) compresi fra 'l punto $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ ed un punto (x, y, z) della superficie (A); trasversale che diviene tangente se i predetti valori si riducono ad uno $\left(=-\frac{\nu}{2\mu}\right)$ il che suppone $\nu^2=4\mu\zeta$ e vicev. In tale ipot. si ha $-\frac{\nu}{2\mu}=-\frac{2\zeta}{\nu}$; e se il punto dato è nella superficie (A) risulta $\zeta=0$ e quindi $\nu=0$. Viceversa, se $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ è in (A) l'eq. $\nu=0$, cioè

$$(2Ay_{,}+Bx_{,}+B''z_{,}+D)m+(2Cx_{,}+By_{,}+B'z_{,}+E)n+ B''y_{,}+B'x_{,}+2C'z_{,}+E'=0 \ldots (8)$$

determina la retta

$$\{ x-x_{,}=n(z-z_{,}), \; y-y_{,}=m(z-z_{,}) \} \ldots (9)$$

ad esser tangente, ed eliminando m, n, mediante il sistema (9) si ottiene

(*) Scriviamo m, n, per b, a, perchè quest'ultime lettere dovremo adoperarle in seg. come simboli caratteristici.

$$(2Ay_{,}+Bx_{,}+B'z_{,}+D)y+(By_{,}+2Cx_{,}+B_{,}z_{,}+E)x+$$
$$(B''y_{,}+B'x_{,}+2C'z_{,}+E')z_{,}+Dy_{,}+Ex_{,}+E'z_{,}+2F=0 \ldots (I)$$

eq. che si riferisce a tutte le rette che toccano la superficie (A) nel punto $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$. e perciò rappresenta il piano tangente nel punto indicato (*).

La trasversale di cui sopra si cangia in una corda, ed $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ diviene il suo punto medio, quando i reali valori di δ sono eguali e di segno contrario. La condizione da cui ciò dipende è $\nu=0$ cioè

$$(2Am+Bn+B'')y_{,}+(2Cn+Bm+B')x_{,}+(2C'+B''m+B'n)z_{,}$$
$$+Dm+En+E'=0 \ldots\ldots (10)\ (^{**})$$

Dessa è l'eq. del piano che biseca le corde parallele alla retta (9), retta, cui può sostituirsi la parallela

$$[\,x=nz,\ y=mz\,] \ldots (11)$$

L'anzidetto piano dicesi diametrale perchè soddisfa alla condizione del §. 456 n.° V. Concepiscasi una 2.ª retta $[x=n_{,}z, y=m_{,}z] \ldots (12)$ parallela al piano (10), che indichiamo con l'eq.

(*) Soppresse in (*I*) le lettere accentuate, e raddoppiando B, D, E, come si fece (435), ottiensi l'eq. della tangente esposta nel cit. §.

(**) È inutile aver riguardo al criterio $-\frac{\zeta}{\mu}>0$ perchè tra le parallele alla retta (9), le quali d'altronde occupano tutto lo spazio, ve ne sono infinite che incontrano la superficie proposta, ed un reale punto d'incontro, in forza dell'eq. (7), n'esige un altro. L'addotto criterio resta dunque necessariamente soddisfatto per rapporto a tutte le trasversali parallele come sopra e però ec.

$$A_{,}x_{,}+B_{,}y_{,}+C_{,}z_{,}+D_{,}=o \ldots I$$

Il criterio da cui ciò dipende è (359)

$$A_{,}n_{,}+B_{,}m_{,}+C_{,}=o \ldots (13)$$

e può verificarsi in infiniti modi, atteso l'indeterminato valore di $m_{,}, n_{,}$. Per avere il piano diametrale

$$A_{,,}x_{,}+B_{,,}y_{,}+C_{,,}z_{,}+D_{,,}=o \ldots II$$

relativo alle corde parallele alla retta (11), basta scrivere $n_{,}, m_{,}$ per n, m nell'eq. (10). I piani I, II diconsi *coniugati*, ed il loro n.° è indefinito perchè la retta (11) è arbitraria e l'eq. (13) contiene due indeterminate.

Qualunque sia la superficie espressa con l'eq. (A) può concepirsi riferita ai piani I, II, il 1.° de' quali sia per es.° xy, il 2° zx. Si determina il 3.° piano coordinato segnandone le tracce ne' due prec., tracce che debbon partire da uno stesso punto della loro intersezione (asse delle x), ed esser parallele alle respettive rette (11), (12). Nell' ipot. di cui si tratta, e che può in infinite maniere verificarsi, le corde parallele ai respettivi assi Az, Ay, restano bipartite, e perciò l'eq. ha necessariamente la forma

$$M'x^2+N'y^2+P'z^2+2Q'x+Q''=o.$$

Esiste dunque una trasformazione di coordinate; (e con essa infinite altre) capace di ri-

durre l' eq. (A) alla forma della prec. (*). Ciò posto convien distinguere due casi: 1.° che la superficie proposta abbia centro: 2.° che ne sia priva.

Il centro, qualora esista, dee trovarsi nell' asse Ax, intersezione de' piani I, II, e per trasferirvi l'origine basta sostituire $x+\alpha$ per x, e determinare α in guisa che sparisca il termine $2Q'x$, (455 n.° V.) per lo che dee farsi $M'\alpha+Q'=0$, cioè $\alpha=-\frac{Q'}{M'}$. Se la formola $\frac{Q'}{M'}$ sia immune da qualsivoglia incongruenza si ha la trasformata

$M'x^2+N'y^2+P'z^2+M'\alpha^2+2Q'\alpha+Q'=0$ ... (I')

che indichiamo per

$$M'x^2+N'y^2+P'z^2+G'=0 \ldots (K)$$

e ridotti i coefficienti M', N', P', a forma intiera, come (370), per

$$Mx^2+Ny^2+Pz^2=Q \ldots (K').$$

L' incongruenza dell' eq. $\alpha=-\frac{Q'}{M'}$ non potendo derivare che dalla evanescenza di M', l' ipot. caratteristica in cui manca esclusiva-

(*) Chiunque brama rischiarata l' astratta indagine della dimostrazione addotta col persuasivo lume dell' esperienza analitica, sostituisca per x, y, z l' espressioni del §. 456, facendovi per comodo $\beta=0$, e vedrà che l' evanescenza de' coefficienti d' xz e d' yz conduce ad un' eq. cubica per determinare $tan.\beta'$; ad un' eq. di 1.° grado per $tan.\beta''$

Si elimina dalla trasformata il termine affetto da xy mediante le prime due del sist. (2) del §. 459. Può consultarsi una nota de' Geometri *Prisson* e *Hachette* nel Trattato delle superficie di 1.° e 2.° ordine di *Monge*.

mente il centro, perchè situato ad una infinita distanza sull' asse Ax, vien costituita dall' eq. $M'=0$; l'eq. (I') diviene

$$N'y^2+P'z^2+2Q'x+2Q'\alpha+Q''=0,$$

e siccome può farsi $\alpha=-\frac{Q''}{2Q'}$, la più semplice eq. delle superficie di 2.° ordine, prive di centro, superficie di cui si hanno, come vedremo, tre immense famiglie, comparisce dopo tutte le riduzioni, sotto la forma definitiva

$$Ny^2+Pz^2+2Qx=0 \ldots (L)$$

§. 458. Il criterio $M'=0$ essendo sotto una forma vaga ed insignificante giova rintracciarne uno, che sia, se è possibile, razionalmente espresso per li coefficienti della proposta.

Se il centro esiste è certo che vi si può trasferire l'origine, e che questa parziale trasformazione punto non dipende dalla situazione de' nuovi piani coordinati. La trasformazione generale può dunque effettuarsi con due successive operazioni, sostituendo cioè per x, y, z, come (370), prima $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$, indi le formole (F) del §. 455.

La trasformata proveniente dalla 1.ª sostituzione coincide con (A), a riserva degli ultimi quattro termini:

$(2A\beta+B\alpha+B''\gamma+D)y$, $(B\beta+2C\alpha+B'\gamma+E)x$,

$(B'\alpha+B''\beta+2C'\gamma+E')z$, $A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+B'\alpha\gamma$ ec.

il 4.° essendo ciò che la proposta diviene se cangiasi x, y, z in α, β, γ:

Posto che il punto (α, β, γ) sia centrale dev' esservi (455 n.° V.) un finito valore di α, β, γ che verifichi l'eq.[i]

$$\left.\begin{array}{r} 2A\beta + B\alpha + B''\gamma + D = 0 \\ B\beta + 2C\alpha + B'\gamma + E = 0 \\ B'\alpha + B''\beta + 2C'\gamma + E' = 0 \end{array}\right\} \ldots (M)$$

Or esse danno

$$\alpha = [(4AC' - B''^2)E + (B'B'' - 2BC')D + (BB'' - 2AB')E'] : \omega$$

$$\beta = [(B'B'' - 2BC')E + (4CC' - B'^2)D + (BB' - 2B'C)E'] : \omega$$

$$\gamma = [(BB'' - 2AB')E + (BB' - 2B''C)D + (4AC - B^2)E'] : \omega$$

dove $\quad \omega = 2(AB'^2 + CB''^2 + C'B^2 - 4ACC' - BB'B'')$,

e quest' espressioni contraddicono all' esistenza del centro nella sola ipot. di $\omega = 0$. Tal è dunque il criterio che si cercava. Esso comprende come caso particolare il criterio $4AC - B^2 = 0$ (370) ed insegna che l'eq. coesistente $M' = 0$ dev' essere della forma $\Gamma\omega$, essendo Γ un moltiplicatore.

Qualora oltre $\omega = 0$ abbiasi $D = 0, E = 0, E' = 0$, due dell' eq.[i] (M) comportano la 3.[a] ed insieme rappresentano una retta indefinita condotta per l' origine; retta ch' è l' asse di una superficie cilindrica insistente sopra una base ellittica od iperbolica. È facile adesso riconoscere le analitiche tracce di un metodo, che

se non conduce alle ridotte (K), (L), ne fa conoscere almeno la generale possibilità.

Facendo $=0$ l'ultimo termine $A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+B'\alpha\gamma$ ec. spettante alla trasformata che nasce dalla sostituzione d' $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ per x, y, z, si ha un'eq. identica ad (A), ed eccettuato il caso che questa escluda ogni superficie curva o sia insignificante, circostanze che debbonsi riconoscere prima d'intraprendere la discussione della proposta, esiste un infinito n.° di reali valori d' α, β, γ che la verificano. I valori di β, γ, corrispondenti ad ogn'individual valore di α, essendo infiniti, si può profittare di β, γ, come di due indeterminate, onde soddisfare a due eq.[i] del sistema (M). Resta così in altra guisa stabilita la generale possibilità di una ridotta della forma

$$M'x^2+N'y^2+P'z^2+2Q'x=0 ;$$

ridotta, che se $M'=0$ ricade nell'eq. (L), altrimenti si riconduce alla forma (K) mediante la eliminazione del 4.° termine.

§. 459. Una delle più frequenti e vantaggiose trasformazioni è quella per cui conservasi uno degli assi primitivi, per es.° Az, e si sostituiscono agli altri (Ax, Ay) due nuovi assi ortogonali At, Au (F.[a] 135) nel piano de' prec. cioè nel piano xy. In questa ipot. le formole (F) divengono molto più semplici, cioè

$$\left.\begin{aligned} x&=t\cos.\hat{tx}+u\,\text{sen}.\hat{tx} \\ y&=t\,\text{sen}.\hat{tx}-u\cos.\hat{tx}\ ,\ z=v \end{aligned}\right\}\ldots(F'')$$

perchè $\cos.\hat{v.z}=1$, i coseni di $\hat{v.x}$, $\hat{v.y}$, $\hat{t.z}$, $\hat{u.z}$, svaniscono, e si ha

$$\cos.\hat{u.x}=\text{sen}.\hat{t.x}\,,\ \cos.\hat{u.y}[=\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\hat{u.x})]\,,$$
$$-\text{sen}.\hat{u.x}=-\cos.\hat{t.x},\ \text{e}\ \cos.\hat{t.y}=\text{sen}.\hat{t.x}.$$

Deesi però notare che quando la projezione orizzontale M′ del punto M cade al di là del piano zx è $y<0$, e la 2.ª formola si cangia in

$$y=u\cos.\hat{t.x}-t\,\text{sen}.\hat{t.x}.$$

Prescindendo dalle costanti α, β, il sistema (F″) è analogo al sistema III del §. 369, e coincide col sistema (7) del §. 266, altro non richiedendosi per riconoscere l'identità dell'uno e dell'altro che sostituire x (=AP) (F.ª 136) ad A, y(=MP) a D, t(=AN) a B, u (=M′N) a C, $\pi-b$ ossia $\pi-\hat{t.x}$ a d.

Dipende dallo stesso sistema (F″) l'ingegnosa trasformazione, proposta e luminosamente applicata da *Laplace* nella Meccanica Celeste (Liv. I. §. 21).

Sieno At, Au, Av (F.ª prec.) i nuovi assi, Au' la traccia del piano tu sul piano xy, $u'\hat{A}x=\theta$, $u'\hat{A}t=\theta'$, M′ la projezione orizzontale del punto M, M′N ed MN sieno perpendicolari ad Au', l'inclinazione del piano tu sul piano xy, cioè $\text{M}\hat{\text{N}}\text{M}'=\theta''$, e chiamando $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ le coordinate di un punto riferito alle rette ortogonali Au', Av' (projez. di Av sul piano xy) (*) ed Az, si ha, in forza del sist. (F″),

(*) L' ult. form. del §. 250 dà $u'\hat{A}v'=\tfrac{1}{2}\pi$

$$x = x_{,}\cos.\theta + y_{,}\operatorname{sen}.\theta\,,$$

$$y = y_{,}\cos.\theta - x_{,}\operatorname{sen}.\theta\,,\quad z = z_{,}$$

Conservando l'asse Au' si sostituiscano agli altri due i nuovi assi, Nv (parall. ad Av) NM, e qualora dicansi $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$ le coordinate di un punto riferito agli assi Au', Nv, NM, sarà

$$\left.\begin{array}{l} x_{,} = x_{,,}\,,\ y_{,} = y_{,,}\cos.\theta'' + z_{,,}\operatorname{sen}.\theta''\,, \\ z_{,} = z_{,,}\cos.\theta'' - y_{,,}\operatorname{sen}.\theta''\,, \end{array}\right\}$$

Si trasporti parallelamente il sistema degli assi AN, NM, Nv sinchè il punto N cada in A e per riguardo ad un punto riferito agli assi At, Au, Av, le cui coordinate sieno t, u, v, siccome in questa e nella prec. ipot. si conserva l'asse Av, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} x_{,,} = t\cos.\theta' - u\operatorname{sen}.\theta' \\ y_{,,} = u\cos.\theta' + t\operatorname{sen}.\theta'\,,\ z_{,,} = v \end{array}\right\}\ldots(a)$$

Si sostituisca nel 1.° sistema l'espressione d' $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ per $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, indi quella di queste coordinate per t, u, v, e si otterrà

$$\left.\begin{array}{l} x = \left\{\begin{array}{l} t\,(\cos.\theta''\operatorname{sen}.\theta'\operatorname{sen}.\theta + \cos.\theta\cos.\theta') + \\ u\,(\cos.\theta'\operatorname{sen}.\theta\cos.\theta'' - \cos.\theta\operatorname{sen}.\theta\,) + \\ v\operatorname{sen}.\theta\operatorname{sen}.\theta'' \end{array}\right. \\ y = \left\{\begin{array}{l} t\,(\cos.\theta\cos.\theta''\operatorname{sen}.\theta' - \operatorname{sen}.\theta\cos.\theta\,) + \\ u\,(\cos.\theta\cos.\theta''\cos.\theta' + \operatorname{sen}.\theta\operatorname{sen}\theta') + \\ v.\operatorname{sen}.\theta''\cos.\theta \end{array}\right. \end{array}\right\}\ldots\mathrm{I}$$

$$z=v.cos.\theta''-u.sen.\theta''cos.\theta'-t.sen.\theta'sen.\theta'',$$

formole che si rendono più semplici facendo $\theta'=o$.

Aggiungendo anche l'ipot. $v=o$ la trasformata esprime la sezione col piano tu, rapportata a due assi nel suo piano, ed a tale oggetto si hanno le formole

$$\left.\begin{array}{l} x=tcos.\theta+ucos.\theta'sen\,\theta \\ y=-tsen.\theta'+ucos.\theta cos.\theta'' \\ z=-u\,sen.\theta'', \end{array}\right\}\ldots(\beta)$$

l'ultime due delle quali si cangiano in

$$y=tsen.\theta-ucos.\theta cos.\theta'',\ z=usen.\theta'',$$

considerando le y, z negative

Si moltiplichi ciascuna delle prec. espressioni, prima pel respettivo coefficiente di t, indi per quello di u, finalmente per quello di v, e sommando separatamente ciascuna terna di prodotti si ritrarrà

$$\left.\begin{array}{l} t=\left\{\begin{array}{l} x(cos.\theta''sen.\theta\,sen.\theta'+cos.\theta cos.\theta')+ \\ y(cos.\theta cos.\theta''\,sen.\theta'-sen.\theta\,cos.\theta')- \\ z\,sen.\theta'sen.\theta'' \end{array}\right. \\ u=\left\{\begin{array}{l} x(cos.\theta''sen.\theta cos.\theta'-cos.\theta sen.\theta')+ \\ y(cos.\theta''cos.\theta cos.\theta'+sen.\theta sen.\theta')- \\ z\,sen.\theta''cos\theta' \end{array}\right. \\ v=xsen.\theta sen\theta''+ysen.\theta''cos.\theta+zcos.\theta''. \end{array}\right\}\ldots\text{II}$$

§. 460. Partendo dall' origine si prenda sul piano xy una retta Ar e sia $r\hat{A}x=\theta$. Congiunta l' origine col punto M della superficie, che verticalmente corrisponde all' estremo di r, dicasi r' la retta che ne proviene e pongasi $r\hat{.}r'=\theta'$. Risulta

$$r=r'cos.\theta' \text{ , } z=r\,sen.\theta', \text{ e quindi}$$

$$x(=rcos.\theta)=r'cos.\theta cos.\theta' \text{ , } y(=rsen.\theta)=r'sen.\theta cos.\theta'.$$

La sostituzione di quest' espressioni per x, y, z dà l' eq. polare della superficie.

Chiamando θ, θ', θ'' gli angoli che r' fa con gli assi si avrebbe

$$x=r'cos.\theta \text{ , } y=r'cos.\theta' \text{ , } z=r'cos.\theta'';$$

eq.[i] che dovendo coesistere con

$$cos.^2\theta+cos.^2\theta'+cos.^2\theta''=1 \text{ .}$$

esigono che oltre il raggio vettore r' sieno cogniti due degli angoli θ, θ', θ''.

§. 461. Il sistema de' piani ortogonali essendo il più semplice importa molto di sapere s' esso sia sempre compatibile con la forma delle ridotte (K), (L).

Che il piano (10)(457) incontri ad angolo retto le corde che bipartisce dipende (357) dalle condizioni

$$\left\{ n = \frac{2Cn + Bm + B'}{2C' + B'n + B'm}, \quad m = \frac{2Am + Bn + B''}{2C' + B'n + B''m} \right\} \text{(N)}$$

e queste possono supporsi soddisfatte, perchè eliminandone m ovvero n si trova un'eq. di 3.° grado, cui spetta per lo meno una risolvente reale (448).

Preso il piano (10), situato a tenore delle condizioni prec., per quello delle x, y, i sistemi

$$\{x = n_{,} z, \ y = m_{,} z\}, \ \{x = n_{,,} z, \ y = m_{,,} z\},$$

col 2.° de' quali vuols' indicata una retta parallela ai piani I, II (§. cit.), si cangiano in $x = n_{,} y$, $x = n_{,,} y$, perchè le projezioni su i piani zx, zy svaniscono, e resta quella sul piano xy, la cui respettiva eq. dedotta dagli anzidetti sistemi, è

$$x = \frac{n_{,}}{m_{,}} y, \quad x = \frac{n_{,,}}{m_{,,}} y.$$

Pongasi $\frac{n_{,}}{m_{,}} = n_1$, $\frac{n_{,,}}{m_{,,}} = n_2$: si avverta che nell'eq. della superficie riferita al nuovo piano xy debbono mancare i termini corrispondenti a $B'xz$, $B''yz$, $E'z$; che in conseguenza essa è della forma

$$A_1 y^2 + B_1 xy + C_1 x^2 + D_1 z^2 + E_1 x + F_1 y + G_1 = 0:$$

che finalmente si ha $z_{,} = 0$; e fatta la sostituzione di $n_1 m_{,}$, $n_2 m_{,,}$ per $n_{,}$, $n_{,,}$, si vedrà che i due piani diametrali coniugati al piano (10), vengono espressi per

$$(2C_1 n_1 + B_1)x_1 + (B_1 n_1 + 2A_1)y_1 + E_1 n_1 + F_1 = 0 \;..(14)$$

$$(2C_1 n_2 + B_1)x_1 + (B_1 n_2 + 2A_1)y_1 + E_1 n_2 + F_1 = 0 \;..(15)$$

Attesa la natura de' piani di cui si tratta la retta $x = n_1 y$ dev' esser parallela al piano (15), la $x = n_2 y$ al piano (14), e ciò dipende (359 crit. VIII) dalla condizione

$$(2C_1 n^2 + B_1)n_1 + B_1 n_2 + 2A_1 = 0 \;\ldots\; (16)\ (*)$$

Le rette stesse sono perpendicolari fra loro se

$$n_1 n_2 + 1 = 0.$$

Ma questa e la prec. danno

$$\left.\begin{array}{l} n_1 = \frac{1}{B_1}\left(C_1 - A_1 + \sqrt{(C_1 - A_1)^2 + B_1^2}\right) \\ n_2 = \frac{1}{B_1}\left(C_1 - A_1 - \sqrt{(C_1 - A_2)^2 + B_1^2}\right) \end{array}\right\} \text{valori reali.}$$

Dunque fra tutti i sistemi di piani diametrali coniugati n' esiste uno di ortogonali. Le intersezioni di questi sono gli *assi* propriamente detti. Supporremo, quando non si avverta il contrario, riferite a questi assi le formole (K), (K'), (L).

Non essendovi ragione, onde l' eq. cubica che dà m od n, spetti ad uno piuttosto che a ciascuno degli altri due assi, le sue risolventi debbon essere tutte reali, e servire alla

(*) Basta fare nel cit. criterio $C = 0$ ed avvertire che ciascuno de' coefficienti n_1, n_2 sta in vece di $\frac{a}{b}$.

determinazione de' tre assi rettangoli, assi il cui sistema è per conseguenza unico.

§ 462 Indicando la posizione di un diametro ortogonale 2Δ spettante ad una superficie dotata di centro, col sistema $x=nz$, $y=mz$, e le coordinate di un suo estremo per $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ si ha $\Delta^2=z_{,}^2(m^2+n^2+1)\ldots(17)$ e l'eq. (A), trasferita al centro cangiasi, attese l'eq.[i] (M) del §. 458, in

$$(Am^2+Bmn+Cn^2+B'n+B''m+C')z_{,}^2+G'=0\ldots(18)$$

dove $G'=A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+B'\alpha\gamma$ ec. $+F=$

$$\beta(A\beta+{}^1\!/\!_2B\alpha+{}^1\!/\!_2B''\gamma+{}^1\!/\!_2D)+\alpha(C\alpha+{}^1\!/\!_2B\beta+{}^1\!/\!_2B'\gamma+{}^1\!/\!_2E)+$$

$$\gamma(C'\gamma+{}^1\!/\!_2B'\alpha+{}^1\!/\!_2B''\beta+{}^1\!/\!_2E')+{}^1\!/\!_2(E\alpha+D\beta+E'\gamma)+F$$

$$={}^1\!/\!_2(E\alpha+D\beta+E'\gamma)+F,$$

ed eliminando $z_{,}^2$ fra l'eq.[i] (17), (18) si ottiene

$$\frac{\Delta^2}{G'}=-\frac{m^2+n^2+1}{Am^2+Bmn+Cn^2+B'n+B''m+C'}\ldots(O)$$

formola che dà tre valori reali per Δ^2, perchè tre coppie di tali valori possono sostituirsi ad n, m: conviene però risolvere l'eq. cubica in m, proveniente dal sistema (N) (§ antec.) indi la 2.ª del sistema stesso, che per altro è di 1.º grado in n.

In vece d'impegnarsi nel molestissimo calcolo di m, n, giova eliminare l'uno e l'altro di questi coefficienti dall' eq. (O), ossia

$n[Cn+{}^1\!/\!_2(Bm+B')]+m[Am+{}^1\!/\!_2(Bn+B'')]+$

$$[C' + \tfrac{1}{2}(B'n + B''m)] + \frac{G'}{\Delta^2}(m^2 + n^2 + 1) = 0.$$

Dal sistema (N)

$$Cn + \tfrac{1}{2}(Bm + B') = n[C' + \tfrac{1}{2}(B'n + B''m)]$$

$$Am + \tfrac{1}{2}(Bn + B'') = m[C' + \tfrac{1}{2}(B'n + B''m)]\text{: dunque}$$

$$\Delta^2[2C' + B'n + B''m] + 2G' = 0 \ldots . (19);$$

le due prec. divengono

$$\left.\begin{array}{l}\Delta^2[2Cn + Bm + B'] + 2nG' = 0 \ldots (20)\\ \Delta^2[2Am + Bn + B''] + 2mG' = 0 \ldots (21)\end{array}\right\}$$

e danno

$$\left\{\begin{array}{l} n = \dfrac{(BB'' - 2AB')\Delta^4 - 2B'G'\Delta^2}{(4AC-B^2)\Delta^4 + 4(A+C)G'\Delta^2 + 4G'^2},\\[2ex] m = \dfrac{(BB' - 2B''C)\Delta^4 - 2B''G'\Delta^2}{(4AC-B^2)\Delta^4 + 4(A+C)G'\Delta^2 + 4G'^2};\end{array}\right.$$

valori dalla cui sostituzione nell' eq. (19) ne proviene

$$(AB'^2 + CB''^2 + C'B^2 - 4ACC' - BB'B'')\Delta^6 +$$
$$G'[B^2 + B'^2 + B''^2 - 4(AC + AC' + CC')]\Delta^4 -$$
$$4G'^2(A + C + C')\Delta^2 - 4G'^3 = 0 \ldots\ldots (P).$$

eq. analoga alla (f) del §. 371, in cui si cangia sopprimendo le lettere accentuate, e che, per essere già noto il coefficiente di Δ^6, come un criterio preliminare (458), assai speditamente si appura qualor si faccia $\Delta^2 = 2G'D$, onde avere la trasformata molto più semplice.

$$2[AB'^2 + C'(B^2 - 4AC) + B''(B''C - BB')]D_,^3 +$$
$$[B^2 - 4AC + B'^2 - 4AC' + B''^2 - 4CC']D_,^2 - 2(A + C + C')D_, - 1 = 0 \ldots (P')$$

§. 463 Per rapporto ad un semidiametro $x = n'z$, $y = m'z$, perpendicolare a Δ, si ha (349)

$$mm' + nn' + 1 = 0 \ldots (22);$$

e fra questa e l' eq.[i] (19), (20), (21) eliminando n,

$$m(B''n' - B'm') = B' - 2n'(C' + G' : \Delta^2)$$
$$m(Bn' - 2Cm' - 2G'm' : \Delta^2) = 2C - B'n' + 2G' : \Delta^2$$
$$m(2An' - Bm' + 2G'n' : \Delta^2) = B - B''n',$$

eq.[i] che qualora suppongasi la m indeterminata, si suddividono in sei, cioè

$$B''n' - B'm' = 0,\ B'\Delta^2 - 2n'(G' + C'\Delta^2) = 0,$$
$$Bn'\Delta^2 - 2m'(C\Delta^2 + G') = 0,\ (2C - B'n')\Delta^2 + 2G' = 0,$$
$$2n'(A\Delta^2 + G') - Bm'\Delta^2 = 0, \qquad B - B''n' = 0;$$

l' estreme delle quali danno

$$n' = \frac{B}{B''},\ m' = \frac{B}{B'};\ \text{la 5.}^a\ \Delta^2 = -\frac{2B''G'}{2B''C - BB'}:$$

le altre due, poichè la 2.ª equivale a

$$\frac{2G'[-B^2B' + 2BB'C - 2BB''C + B^2B']}{B'(2B''C - BB')} = 0,$$

cioè $0 = 0$, riduconsi a

$$B'(B^2 - B''^2) = 2BB''(C - C'); \; B(B'^2 - B''^2) = 2B'B''(C - A),$$

Tali sono i criteri che decidono essere la superficie (A) di *rivoluzione* intorno all' asse 2Δ cioè $\{x = nz, \; y = mz\}$.

§. 464 Per un asse AB $(=2a)$ (F.ª 94 Tav. I) e per un diametro MM $(=2d)$ di una superficie (k), per comodo trasformata in $px^2 + qy^2 + sz^2 = 1$, che supponiamo riferita ai diametri $2a$, $2b_{,}$, $2c_{,}$, si concepisca un piano diametrale: dai punti M, M' si conducano le corde Mm, $M'm'$, perpendicolari ad AB, ed mm' sarà un diametro eguale ad MM'. Due sono pertanto le posizioni di un dato diametro $2d$ nel predetto piano diametrale, e non si riducono ad una che quando MM' coincide con l' asse ED $(=2b)$. Ciò posto, si rappresenti la posizione di $2d$ col sistema $x = nz$, $y = mz$ e sia $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ uno de' suoi estremi. In forza dell' eq.ⁱ

$$x_{,} = nz_{,}, \; y_{,} = mz_{,}; \; px_{,}^2 + qy_{,}^2 + sz_{,}^2 = 1,$$

facendo

$$\cos . \hat{x_{,} . y_{,}} (= \cos . \hat{a_{,} . b_{,}}) = \theta, \; \cos . \hat{x_{,} . z_{,}} (= \cos . \hat{a_{,} . c_{,}}) = \theta',$$

$$\cos . \hat{y_{,} . z_{,}} (= \cos . \hat{b_{,} . c_{,}}) = \theta'', \text{ si ha}$$

$$d^2 = z_{,}^2 (1 + m^2 + n^2 + 2mn\theta + 2n\theta' + 2m'\theta')$$

$$z_{,}^2 (pn^2 + qm^2 + s) = 1, \text{ e quindi}$$

$$(pd^2 - 1)n^2 - 2(m\theta + \theta')n + (qd^2 - 1)m^2 - 2m\theta'' - sd^2 - 1 = 0.$$

Per far sì che $2d$ si cangi in asse bisogna

che i valori di n, qualunque sia quello di m, divengano eguali e viceversa, il che dipende dall' eq.

$$(m\theta+\theta')^2=(pd^2-1)[(qd^2-1)m^2-2m\theta''+sd^2-1],$$ ossia

$$[(pd^2-1)(qd^2-1)-\theta^2]m^2-2[\theta''(pd^2-1)+\theta\theta']m+$$
$$(pd^2-1)(sd^2-1)-\theta'^2=0,$$

purchè anche in questa, si verifichi

$$[\theta''(pd^2-1)+\theta\theta']^2=[(pd^2-1)(qd^2-1)-\theta^2]\times$$
$$[(pd^2-1)[sd^2-1]-\theta'^2]=0.$$

Sostituiscasi $\frac{1}{a_{,}^2}$ per p, $\frac{1}{b_{,}^2}$ per q, $\frac{1}{c_{,}^2}$ per s; si ordini per le potenze di $\Delta_{,}$ [$=d^2$], e fatta la moltiplicazione per $a_{,}^2, b_{,}^2, c_{,}^2$, si avrà

$$\Delta_{,}^3-[a_{,}^2+b_{,}^2+c_{,}^2]\Delta_{,}^2+[a_{,}^2 b_{,}^2 \, sen.^2 \, a_{,}\hat{.}b_{,}+$$
$$a_{,}^2 c_{,}^2 \, sen.^2 \, a_{,}\hat{.}c_{,}+b_{,}^2 c_{,}^2 \, sen.^2 \, b_{,}\hat{.}c_{,}]\Delta_{,}-$$
$$a_{,}^2 b_{,}^2 c_{,}^2 \, [1-\theta^2-\theta'^2-\theta''^2+2\theta\theta'\theta'']=0.$$

Da questa eq., indicando per a^2, b^2, c^2 i valori di $\Delta_{,}$, si ritrae $a^2+b^2+c^2=a_{,}^2+b_{,}^2+c_{,}^2$ [*]: dunque

(*) Per vedere che ogni eq. cubica $x^3-hx^2+ix-l=o$ può mettersi sotto la forma

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)=0,$$ ossia

$$x^3-(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)x^2+[\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3]x-\alpha_1\alpha_2\alpha_3=0$$

s' istituisca l' eq.

Teor. *La somma de' quadrati di tre diametri coniugati eguaglia quella de' quadrati degli assi.*

Il confronto del coefficiente di $\Delta_{,}$ con la somma de' prodotti a due per due de' quadrati a^2, b^2, c^2, dà

Teor. *Che i quadrati de' rombi costruiti sui diametri coniugati equivalgono insieme alla somma de' quadrati de' rettangoli costruiti sugli assi.*

Eguagliando l'ultimo termine con $a^2 b^2 c^2$ si scuopre

Teor. *Che il romboide costruito sui diametri coniugati* (303 sul fine) *eguaglia il consimile volume ortogonale costruito sugli assi.*

I teor. prec. non soffrono eccezione se alcuno de' quadrati a^2, b^2, c^2, si suppone negativo (*).

§. 465. Che l'eq. [A] sempre possa ridursi ad una delle forme [K], [L] [457] è una proposizione fondamentale, astratta per altro e quasi inutile nelle particolari applicazioni, che sempre debbonsi avere in mira, se non pos-

$$x^3 - hx^2 + ix - l = (x^2 - p_1 x + p_2)(x - p_3) =$$
$$x^3 - (p_1 + p_3)x^2 + (p_2 + p_1 p_3)x - p_2 p_3 = 0,$$

e mediante il confronto de' termini simili si otterrà

$$p_3^3 - hp_3^2 + ip_3 - l = 0\ ,\ p_2 = l : p_3\ ,\ p_1 = h - p_3,$$

cioè un valore reale per p_3 (448) ed un simile valore per p_2, p_1 Ma $x^2 - p_1 x + p_2 = 0$ ha due risolventi α_1, α_2 e $p_1 = \alpha_1 + \alpha_2$, $p_2 = \alpha_1 \alpha_2$: dunque, scrivendo α_3 per p_3, risulta ec.

(*) L'insigne metodo con cui siamo giunti ai tre teor. prec. deesi al Sig. *Gaetano Giorgini*. (Opusc. cit. §. 19).

seggasi un acconcio metodo con cui appurare in ogni caso il numerico valore di M', N', P', G'.

Limitandoci per adesso alla formola [K] proponiamo provvisoriamente il seg. metodo.

Risciolta la [P'][462] si scriva M', N', P' per C, A, C; e soppressi B, B', B' [coefficienti de' termini che si suppongono eliminati) sostituiscasi $\frac{1}{2\delta}$ per $D_{,}$, onde avere

$$\delta^3+[M'+N'+P']\delta^2+[M'N'+M'P'+N'P']\Delta'+M'N'P'=0$$

cioè un'eq. le cui risolventi sono $-M', -N', -P'$, [pag. 135 Nota]

Dicansi al solito a^2, b^2, c^2 i valori di Δ^2, e mediante l'eq. ausiliare $\Delta^2=2G'D_{,}=\frac{G'}{\delta}$ si ritrarrà

$$M'=-\frac{G'}{a^2},\quad N'=-\frac{G'}{b^2},\quad P'=-\frac{G'}{c^2};$$

dove G' è un n.° cognito [462]

Superficie di 2.° ordine dotate di centro.

§. 466. Può darsi 1.° che i coefficienti M', N', P' della formola [K] sieno tutti positivi: 2.° che uno sia tale. La mutazione de' segni riconduce al 2.° caso quello in cui i coefficienti positivi sono due: basta che notisi l'influenza delle ipotesi $G' \gtreqless 0$ sull'indole della superficie.

Caso I. Posto $G'<0$, altrimenti la superficie è immaginaria, si determinano i semidiametri

cogniugati $a_{,}, b_{,}, c_{,}$, facendo successivamente in [K] due coordinate uguali a zero, e si ottiene

$$a_{,}^{2}=\frac{G'}{M'}, b_{,}^{2}=\frac{G'}{N'}, c_{,}^{2}=\frac{G'}{P'} \text{; quindi}$$

$$\frac{1}{a_{,}^{2}} x^{2}+\frac{1}{b_{,}^{2}} y^{2}+\frac{1}{c_{,}^{2}} z^{2}=1 \ldots . [Q] \text{ ossia}$$

$$b_{,}^{2} c_{,}^{2} x^{2}+a_{,}^{2} c_{,}^{2} y^{2}+a_{,}^{2} b_{,}^{2} z^{2}=a_{,}^{2} b_{,}^{2} c_{,}^{2} \ldots [Q']$$

D'ora innanzi profitteremo dell'eq. relativa agli assi e sotto la forma

$$px^{2}+qy^{2}+sz^{2}=1 \ldots . [Q'']$$

Sostituendo un particolar valore $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ per x, y, z essa dà la respettiva projezione ellittica

$$\left.\begin{array}{l} qy^{2}+sz^{2}=1-px_{,}^{2} \\ px^{2}+sz^{2}=1-qy_{,}^{2} \\ px^{2}+qy^{2}=1-sz_{,}^{2} \end{array}\right\} , \ldots [R]$$

delle sezioni, fatte con un piano, respettivamente parallelo ad yz, xz, xy, e ciascuna di tali projezioni si riferisce ad una sezione reale se $x_{,}<a$, $y_{,}<b$, $z_{,}<c$; rappresenta le sezioni o *tracce* principali, formate cioè da' piani coordinati, quando si suppone $x_{,}=0$, $y_{,}=0$, $z_{,}=0$. Le respettive sezioni di cui si tratta sono pertanto

$$\left.\begin{array}{l} c^{2} y^{2}+b^{2} z^{2}=b^{2} c^{2}, \\ c^{2} y^{2}+a^{2} z^{2}=a^{2} c^{2}, \\ b^{2} x^{2}+a^{2} y^{2}=a^{2} b^{2}. \end{array}\right\} \ldots . [R']$$

Si ha un' indefinita serie di sezioni ellittiche parallele, dando ad x tutti i valori fra o ed a; ad y, z quelli che sono compresi fra o, b; o, c. Sembra dunque che la superficie sia ristretta in uno spazio finito. Per assicurarcene, giacchè anche il cono può avere le tre sezioni principali di forma ellittica, si concepisca segata la superficie [Q''] con un piano $z=Hx+Ly$. La sezione, projettata sul piano xy, ha per eq.

$$[p+H^2s]x^2+[q+L^2s]y^2+2HLsxy=1,$$

e perchè $[p+H^2s][q+L^2s]>H^2L^2s^2$, ella spetta all' ellisse [370]. Dunque la superficie è rientrante, attesa la natura delle sue sezioni dicesi *ellissoide*, e può concepirsi generata nella maniera seguente.

Presa, partendo dall' origine, una parte di Ax, $=\pm a$ una di Ay, $=\pm b$, una di Az, $=\pm c$, si descriva in ciascun piano coordinato, che contiene quattro de' sei punti come qui sopra determinati, un' ellisse i cui vertici sieno i quattro punti in esso esistenti, e si avranno le tre ellissi principali; quindi s' immagini un piano che muovasi parallelamente ad un piano coordinato, ed il sistema di tutte l' ellissi, aventi per vertici le successive quaterne di punti, ove il piano mobile, ad angolo retto incontra due ellissi principali, costituisce ec.

Se due coefficienti sono eguali, l' ellissoide diventa di rivoluzione; così $p=q$ cangia la 3.ª delle [R'] in eq. circolare, e mostra che

la superficie vien generata da un' ellisse, i cui assi $2a$, $2c$, che insieme col suo piano ravvolgasi intorno ad Az. Tal superficie la diciamo *sferoide*.

Si ha la sfera quando $p=q=s$, e la sua eq. $x^2+y^2+z^2=a^2$ resta compresa come caso particolare in

$$[x-\alpha]^2+[y-\beta]^2+[z-\gamma]^2=r^2 \ldots . \text{[I]}$$

formola che dimostra necessarie quattro condizioni per costituire la posizione e la grandezza di una sfera. Essa è determinata se passa per quattro punti, niuna terna de' quali sia in linea retta. Posta l'origine in uno di essi conducasi Ax per un 2.°, Ay per un 3.°, le respettive coordinate de' punti proposti saranno

$$[0, 0, 0], [x_{,,}, 0, 0], [x_{,,,}, y_{,,,}, 0], [x_{\text{iv}}, y_{\text{iv}}, z_{\text{iv}}];$$

l' eq. (I), che può supporsi messa sotto la forma

$$x^2+y^2+z^2+hx+ky+iz+l=0,$$

respettivamente si riduce ad

$$l=0, x_{,,}^2+hx_{,,}+l=0, x_{,,,}^2+y_{,,,}^2+hx_{,,,}+ky_{,,,}+l=0,$$

$$x_{\text{iv}}^2+y_{\text{iv}}^2+z_{\text{iv}}^2+hx_{\text{iv}}+ly_{\text{iv}}+iz_{\text{iv}}+l=0;$$

Quindi $l=0$, $k=-x_{,,}$, $h=\frac{y_{,,,}}{x_{,,,}}(x_{,,}-y_{,,,})-x_{,,,}$,

$$i=\frac{1}{z_{\text{iv}}}\left[x_{,,}x_{\text{iv}}+x_{,,}y_{\text{iv}}-x_{\text{iv}}^2-y_{\text{iv}}^2-z_{\text{iv}}^2+\frac{x_{,,}y_{,,,}}{x_{,,,}}(-x_{,,}+y_{,,,})\right]$$

In forza dell'eq.[i] $M'=-\frac{G'}{a^2}$, $N'=-\frac{G'}{b^2}$, $P'=-\frac{G'}{c^2}$.

M' ed a, [lo stesso dicasi di N', b; di P', c] sono quantità inverse; ad $M=0$ corrisponde $a=\infty$, e l'eq. $N'y^2+P'z^2-G'=0$ si riferisce ad un cilindro infinito nella direzione di Ax, insistente sulla base ellittica $N'y^2+P'z^2-G'=0$. In generale, ogni eq. di 2.° grado in x, y rappresenta un cilindro, se con un'opportuna variazione degli assi può eliminarsi una coordinata.

Quando $M'=0$ ed $N'=0$, l'eq. $z=\pm\sqrt{-\frac{G'}{P'}}$ esprime due piani equidistanti da xy della quantità $\pm\sqrt{-\frac{G'}{P'}}$.

II. Caso. Essendo positivo un solo coefficiente, per es.° P', e $G'>0$, onde

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=1,$$

le respettive sezioni principali sono

$$\frac{1}{c^2}z^2-\frac{1}{b^2}y^2+1=0,$$

$$\frac{1}{c^2}z^2-\frac{1}{a^2}x^2+1=0,$$

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-1=0.$$

Le due prime si riducono alla respettiva forma

$$z^2=\frac{c^2}{b^2}(y^2-b^2)\ ,\ z^2=\frac{c^2}{a^2}(x^2-a^2),$$

ed appartengono all' iperbola; la 3.ª all' ellisse. Un quarto di questa curva è DDC [F.ª 137]

Le sezioni parallele ad xy, la cui projezione è

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2=1+\frac{1}{c^2}z_{,}^2\ ,$$

sono tutte ellittiche e si estendono in uno spazio indefinito, tanto al di sopra che al di sotto del piano xy. La superficie indicata, che diciamo *iperboloide*, si concepisce generata da un' ellisse variabile di forma e di posizione, che nel suo moto parallelo ad xy conserva i vertici su quattro iperbole, due delle quali sono NDn, NCn.

§. 467. Tagliando l' anzidetta iperboloide con un piano $y=k$ [parallelo ad xz] si ottiene l' eq.

$$\frac{1}{a^2}x^2-\frac{1}{c^2}z^2=1-\frac{1}{b^2}k^2:$$

Questa 1.º si riferisce ad un' iperbola il cui asse reale cade in Ax, e diminuisce con k se $k<b$: 2.º si riduce ad

$$\left(\frac{1}{a}x-\frac{1}{c}z\right)\left(\frac{1}{a}x+\frac{1}{c}z\right)=0\ ,$$

sistema di due rette, quando $k=b$: 3.º rap-

presenta una nuova iperbola, il cui asse reale Az, allorchè k divien $>b$.

Per vedere se vi sieno altri sistemi di rette coincidenti con l' iperboloide, si combini una retta

$$\{x=n_{,}z+\alpha_{,}\ ,\ y=m_{,}z+\beta_{,}\}\ldots(1)$$

con $\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=1$,

e nella risultante che si ha eliminando x,y, cioè in

$$\left(\frac{n_{,}^2}{a^2}+\frac{m_{,}^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{n_{,}\alpha_{,}}{a^2}+\frac{m_{,}\beta_{,}}{b^2}\right)z+\frac{\alpha_{,}^2}{a^2}+\frac{\beta_{,}^2}{b^2}-1=0\ldots(S)$$

facciasi

$$\begin{cases}\frac{n_{,}^2}{a^2}+\frac{m_{,}^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0\ldots(2)\\ \frac{n_{,}\alpha_{,}}{a^2}+\frac{m_{,}\beta_{,}}{b^2}\quad=0\ldots(3)\\ \frac{\alpha_{,}^2}{a^2}+\frac{\beta_{,}^2}{b^2}-1=0\ldots(4)\end{cases}$$

Dall'eq. [4] si ha $\beta_{,}=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\alpha_{,}^2}$, e siccome esistono infiniti valori di $\alpha_{,}$ tutti minori di a, infiniti pur sono i reali valori di $\beta_{,}$: avvertasi che l' eq.[i] [2], [3] danno

$m_{,}=\pm\frac{a\beta_{,}}{bc}$, $n_{,}=\mp\frac{b\alpha_{,}}{ac}$, e si concluderà ch' esistono infiniti sistemi aventi la proprietà sopra indicata.

L' eq. [4] dimostra che il punto $\alpha_{,}, \beta_{,}, 0$,

in cui una retta coincidente incontra il piano xy, cade sulla traccia di essa in detto piano; pel punto di cui sopra passano due rette coincidenti, e ciò apparisce dal sist.

$$m_{,}=\pm\frac{a\beta_{,}}{bc},\quad n_{,}=\mp\frac{b\alpha_{,}}{ac}.$$

Eliminando z mediante uno de' sistemi

$$\left\{x=\pm\frac{a\beta_{,}}{bc}z+\alpha_{,},\ y=\pm\frac{b\alpha_{,}}{ac}z+\beta_{,}\right\}\ldots(5)$$

si ottiene $y-\beta_{,}=-\frac{b^2\alpha_{,}}{a^2\beta_{,}}(x-\alpha_{,})\ldots(6)$

eq. della tangente ellittica [391]: dunque *la projezione in xy d'ogni retta esistente sull'iperboloide tocca la traccia di questa nel suddetto piano.*

Per rapporto ad una nuova retta coincidente, che passi pel punto $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, o, della traccia [6] si ha il simbolo

$$\left\{x=\pm\frac{a\beta_{,,}}{bc}z+\alpha_{,,},\ y=\pm\frac{b\alpha_{,,}}{ac}z+\beta_{,,}\right\}\ldots(7)$$

Ma il criterio IV [348] applicato alla 1.ª del sistema [5] ed alla 2.ª del sistema [7], ovvero alla 1ª di questo ed alla 2.ª di quello (*) dà l'eq.

$$\frac{1}{a^2}\alpha_{,}^2+\frac{1}{b^2}\beta_{,}^2=\frac{1}{a^2}\alpha_{,,}^2+\frac{1}{b^2}\beta_{,,}^2,$$

ciascun membro della quale, in forza dell'eq. [4] è $=1$: dunque *una retta compresa in uno*

(*) Intendiamo per 2.ª l'eq. affetta dal segno inferiore.

degli anzidetti sistemi incontra tutte quelle dell' altro. Profitteremo in seg. di questa idea caratteristica per dimostrare che l' iperboloide può esser generata da una retta del sistema [5), la quale scivoli su tre rette del sistema [7] o viceversa: intanto passiamo ad esporre la seg. generazione semplicissima ed elegante.

Pel punto M' $[x_{,}, y_{,}]$ dell' ellisse B'D'E', [F.ª 138], situata nel piano xy, la cui eq.

$$\frac{1}{a^2}x_{,}^2+\frac{1}{b^2}y_{,}^2=1 \ldots (8)$$

si conduca una retta FG, la cui projezione sul predetto piano sia la tangente M'T in M', cioè [391]

$$\frac{1}{a^2}x_{,}.x+\frac{1}{b^2}y_{,}.y=1 \ldots (9)$$

e passi per M'' $(x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}=c)$, punto di un' altra ellisse

$$\text{B''D''E''}, \ldots \frac{1}{a^2}x_{,,}^2+\frac{1}{b^2}y_{,,}^2=2 \ldots (10)$$

Siccome le coordinate $x_{,,}$, $y_{,,}$, appartengono anche alla M'T, l' eq. [9] comporta quest' altra

$$\frac{1}{a^2}x_{,}x_{,,}+\frac{1}{b^2}y_{,}y_{,,}=1 \ldots (11)$$

La retta FG, facendo $z_{,}=0$ [346], ha per eq.ⁱ

$$\left\{x-x_{,}=\frac{x_{,,}-x_{,}}{z_{,,}}z\;,\; y-y_{,}=\frac{y_{,,}-y_{,}}{z_{,,}}z\right\} \ldots (12)$$

e per trovare una formola che la rappresenti in qualunque posizione, e perciò esprima la superficie ove tutte le rette [12] sono compre-

se, basta eliminare dalle cit.eq.[i] $x_{,}, y_{,}, x_{,,}, y_{,,}: z_{,,}$.
A tal effetto deducasi [8]+[10]−2[11], cioè

$$\frac{1}{a^2}(x_{,,}-x_{,})^2+\frac{1}{b^2}(y_{,,}-y_{,})^2=1:$$

mediante il sistema [12] si elimini $x_{,}-x_{,,}, y_{,}-y_{,,}$, restituiscasi c per $z_{,,}$, ed avvertendo che in forza delle (8), [9] è

$$\frac{1}{a^2}(x_{,}^2-xx_{,})+\frac{1}{b^2}(y_{,}^2-yy_{,})=0\text{ , si otterrà}$$

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=1\text{, come [466 p. 141]}$$

Se $b=a$ la prec. eq. si riferisce al *timpano iperbolico* di *Cavalieri*, altrimenti detto *cilindroide* di *Wallis*, generato dalla rivoluzione dell' iperbola intorno all'asse coniugato, del che in seguito.

§. 468. Per far sì che la retta [1] divenga un assintoto basta supporre $z=\infty$ nell' eq. [S] del §. 467. In tale ipot. ella si riduce ad

$$\left(\frac{n_{,}^2}{a^2}+\frac{m_{,}^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2=0\text{ ed esige che sia}$$

$\frac{n_{,}^2}{a^2}+\frac{m_{,}^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}=0$; cioè che sia soddisfatta l'eq. (2): quindi

$$2\left(\frac{n_{,}\alpha_{,}}{a^2}+\frac{m_{,}\beta_{,}}{b^2}\right)z+\frac{\alpha_{,}^2}{a^2}+\frac{\beta_{,}^2}{b^2}-1=0;$$

e posto $z=\infty$ si ha di nuovo $\frac{n_{,}\alpha_{,}}{a^2}+\frac{m_{,}\beta_{,}}{b^2}=0$

cioè l'eq. (3).

Che la retta [1] sia un assintoto dipende dunque dall'eq.[i] [2], [3], ed attese le quattro indeterminate $n_{,}$, $m_{,}$, $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, il n.° degli assintoti è infinito. Succede lo stesso se la cit. retta si suppone tirata per l'origine, perchè $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$ svaniscono e resta la sola condizione [2]. Non si ha che da eliminare $n_{,}$ e $m_{,}$ fra l'eq. [2] e le due $x=n_{,}z$, $y=m_{,}z$ per avere un' eq. relativa a tutti gli assintoti condotti per l'origine, cioè alla superf. del cono assintotico

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2-\frac{1}{c^2}z^2=0 \ldots (13)$$

Il n.° degli assintoti divien finito e talvolta nullo quando fra $n_{,}$, $m_{,}$, $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$ sono assegnati due rapporti. Volendosi per es.° che l'assintoto passi per $[x_{,}, y_{,}, z_{,}]$., oltre l'eq.[i] [2], [3] si hanno le due

$$x_{,}=n_{,}z_{,}+\alpha_{,}\,,\; y_{,}=m_{,}z_{,}+\beta_{,}.$$

Ricavandone $\alpha_{,}$ e $\beta_{,}$ l'eq. [3] si cangia in

$$\frac{n_{,}}{a^2}(x_{,}-n_{,}z_{,})+\frac{m_{,}}{b^2}(y_{,}-m_{,}z_{,})=0,$$

che in forza dell'eq. [2] riducesi ad

$$\frac{n_{,}}{a^2}x_{,}+\frac{m_{,}}{b^2}y_{,}-\frac{1}{c^2}z_{,}=0 \ldots (14)$$

e questa combinata con l'eq. [2] somministra

$$\left.\begin{aligned} n_{,}&=\frac{a^2[b^2x_{,}z_{,}\pm y_{,}\sqrt{(b^2c^2x_{,}^2+a^2c^2y_{,}^2-a^2b^2z_{,}^2)}]}{c^2(a^2y_{,}^2+b^2x_{,}^2)}\\ m_{,}&=\frac{b^2[a^2y_{,}z_{,}\pm x_{,}\sqrt{(b^2c^2x_{,}^2+a^2c^2y_{,}^2-a^2b^2z_{,}^2)}]}{c^2(a^2y_{,}^2+b^2x_{,}^2)}\end{aligned}\right\}\ldots (15)$$

Se il punto $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ è sul cono assintotico [13] sparisce il radicale e si ha un solo assintoto, come dev' essere.

Supponendo che $z_{,}$ superi l' ordinata del cono anzidetto il radicale diviene immaginario: dunque il punto $[x_{,}, y_{,}, z_{,}]$ dev' essere tra la superficie assintotica ed il piano xy. In tale ipotesi ad ogni punto dato corrisponde un doppio assintoto.

Se nel sistema [15] si fa $x_{,}=hz_{,}$, $y_{,}=kz_{,}$, il che suppone il punto $[x_{,}, y_{,}, z_{,}]$ mobile su di una retta tirata pel centro, le coordinate $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, spariscono e si ha per ciascuna delle tangenti trigonometriche $n_{,}$, $m_{,}$, un doppio valore costante che diciamo n_1, n_2; m_1, m_2: dunque gli *assintoti che possono condursi per un punto di una retta che passa pel centro sono paralleli fra loro, e costituiscono due sistemi o piani assintotici, che s' incontrano lungo la retta* $x_{,}=hz_{,}$, $y_{,}=kz_{,}$.

Basta sostituire n_1, m_1, indi n_2, m_2 per $n_{,}$, $m_{,}$ nell'eq. [19] per avere quelle de'piani indicati.[*]

§. 469 A misura che $G'[<0]$ diminuisce, le sezioni ellittiche si ristringono, e quando $G'=0$ la sezione principale CD'D si riduce ad un punto, origine delle coordinate, giacchè per verificare la $Mx^2+Ny^2=0$ convien fare $x=0$ ed $y=0$: le sezioni iperboliche principali si cangiano in due rette

$$z=y\sqrt{\frac{N'}{P'}},\quad z=x\sqrt{\frac{M'}{P'}};$$

(*) Giorgini Opusc. cit.

le secondarie analoghe rimangono iperboliche.

Nell' ipot. di cui si tratta l' eq. della superficie

$$P'z^2 - N'y^2 - M'x^2 = 0 \dots (T)$$

può in infinite maniere verificarsi mediante il sistema $x = nz$, $y = mz$, poichè l' eq. finale $P' - N'm^2 - M'n^2 = 0$ trovasi affetta dalle indeterminate m, n, la 1.ª delle quali non riconosce altra legge che quella di dover' essere inclusivamente compresa tra i limiti $\pm\sqrt{\frac{M'}{P'}}$:
per conseguenza l' eq. [T] rappresenta, come dianzi abbiamo indirettamente osservato, una superficie conica il cui vertice è nell' origine, la base [parallela ad xz o ad yz] iperbolica, ovvero parallela ad xy ed ellittica.

Per ravvisare con evidenza che quando $N' = M'$ l' anzidetta base prende la forma circolare, sia in A [F. 139] il vertice di un cono retto, di base circolare, il raggio $BC = a$, l' asse $AB = b$, e l' ordinata rettangola $MN = z$, e si vedrà che in forza de' trigoni simili ABC, ANM, si ha

$$MN(=z) : AN(=\sqrt{x^2 + y^2}) :: b : a,$$

cioè $a^2 z^2 = b^2 (x^2 + y^2)$ (*)

Qualora si collochi in A il centro B si trova

(*) Eliminando z mediante l' eq. $z = Hx + Ly + K$, si ottiene

$$(a^2L^2 - b^2)y^2 + 2a^2HLxy + (a^2H^2 - b)x^2 +$$
$$2a^2K(Hx + Ly + \tfrac{1}{2}K) = 0$$

cioè un' ellisse, una parabola, un' iperbola, secondo che sia $b >=< a\sqrt{H^2 + L^2}$.

$$a^2(b-z)^2=b^2(x^2+y^2).$$

Supponendo che G' seguiti a diminuire e divenga <o, l'eq. della ellisse principale si rende assurda, e l'immaginarietà di tal sezione fa sì che la superficie venga divisa in due come nella F.ª 140. Essa appartiene all' *iperboloide discontinua,* superficie la cui generazione è analoga a quella dell' iperboloide, e le cui sezioni hanno il 1.º asse sull' Az. [*]

Il cono di cui sopra, ha lo stesso rapporto alle due iperboloidi che gli assintoti alle iperbole coniche.

Infatti se dall' eq. di ambe le iperboloidi

$$Pz^2-Ny^2-Mx^2\pm Q=o\ldots.(U)$$

si deduce $z^2=\frac{1}{P}(Mx^2+Ny^2\mp Q)$,

e chiamando z' l' ordinata conica corrispondente, data dall'eq. $z'^2=\frac{1}{P}(Mx^2+Ny^2)$, ottiensi

$$z'-z=\mp\frac{Q}{P(z'+z)},$$

espressione che dimostra essere $z=z'$ quando $z=\infty=z'$, cioè che la superficie conica $Pz^2-Ny^2-Mx^2=o$ è assintotica per rapporto all' una ed all' altra iperboloide.

(*) Rigettiamo le improprie ed oscure denominazioni d'iperboloide *ad una e due falde*, tanto più che la voce *falda* è travolta ad un significato estraneo (Alberti Dizion.º Enciclop.)

se $G'>o$ in (K) si ha $z'<z$ ed il cono circonda la convessità iperbolica dell' iperboloide continua: quando $G'>o$ risulta $z'>z$ ed il cono è circondato dall' iperboloide *discontinua.*

§. 470 Combinando con la prec. eq. (U) un piano $z=Hx+Ly$ si ottiene

$$(PL^2-N)y^2+(PH^2-M)x^2+2HLPxy \pm Q=o.$$

Dunque la sezione è un' ellisse, una parabola, un' iperbola, secondo che sia (370)

$$(PL^2-N)(PH^2-M)>,=,<(HLP)^2 \ (*)$$

Mutando il segno di M e di N, i criterj prec. si adattano all' ellissoide compresa nell' eq. (K') (457), ed è chiaro che le projezioni, parabolica ed iperbolica, restano escluse.

§. 471. L'eq. generale del piano tangente di una superficie di 2.° ordine dotata di centro, comparisce sotto una forma semplice e simmetrica se venga in essa dato il contatto $(x_,, y_,, z_,)$, e si deduce dalla formola (I) (§. cit. p. 119) sopprimendo i termini che debbonsi eliminare per giungere alla (K') e sostituendo respettivamente M, N, P, Q per 2A, 2C, 2C', 2F, indi q per $\frac{M}{Q}$, p per $\frac{N}{Q}$, s per $\frac{P}{Q}$.

La formola che ne proviene è

$$px_,x+qy_,y+sz_,z=\pm 1.$$

Per rapporto alla sfera evvi un ingegnoso

(*) La proiezione ellittica potrebbe riferirsi ad un circolo, ma l' esistenza della sezione ellittica è assicurata d' altronde (466 Caso II)

metodo che direttamente somministra il piano tangente.

Sia $A_1(x-x_1)+B_1(y-y_1)+z-z_1=0$

un piano condotto per l'assegnato contatto (x_1, y_1, z_1). Affinchè sia tangente si richiede e basta che il raggio r tirato al contatto, raggio le cui eq.[i] sono (346)

$$x=\frac{x_1-\alpha}{z_1-\gamma}z+,\ y=\frac{y_1-\beta}{z_1-\gamma}+\ ,$$

gli sia perpendicolare, cioè che si abbia (357)

$$A_1=\frac{x_1-\alpha}{z_1-\gamma},\quad B_1=\frac{y_1-\beta}{z_1-\gamma}.$$

Dunque l'eq. del piano tangente è

$$(x_1-\alpha)(x-x_1)+(y_1-\beta)(y-y_1)+(z_1-\gamma)(z-z_1)=0$$

Sostituendovi r^2 in vece di $x_1^2+y_1^2+z_1^2$ ella si cangia in

$$(x_1-\alpha)x+(y_1-\beta)y+(z_1-\gamma)z-\alpha x_1-\beta y_1-\gamma z_1+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=0$$

Si sopprimono gli ultimi quattro termini se l'origine è nella superficie sferica: S'ella è nel centro si ha

$$xx_1+yy_1+zz_1=r^2.$$

Per costruire il piano tangente sieno P', P'' (F.[a] 141) le respettive projezioni del punto (x_1, y_1, z_1) sui piani xy, xz, e perciò x_1=CP, y_1=PP', z_1=PP''. Le tracce del richiesto piano

sull' uno e sull'altro degli anzidetti piani coordinati sono

$$xx_{,}+yy_{,}=r^2\ ,\ xx_{,}+zz_{,}=r^2\ .$$

Fatto $y=0$ nella 1.ª ovvero $z=0$ nella 2.ª si ottiene $x=\frac{r}{x_{,}}$, cioè la parte di Cx, tagliata dal piano tangente: semmento che si costruisce tirando AD parallela a PB e prendendo CE=AD. Si disegnano le tracce del piano mediante la perpendicolare tirata da E ne' respettivi piani xy, xz, sulle CI, CL, proiezioni del raggio al contatto sugli anzidetti piani.

§. 472 Lo specioso teor. del §. 383 non si estende alla sfera ma conduce ad un nuovo teor. non meno elegante. Facendo (§. cit.) AB=$2r$, AD=$2x$, si ottiene

$$\textit{Arbelo} = \tfrac{1}{2}\pi[r^2 - x^2 - (r-x)^2] = \pi(r-x)x:$$

Circ. il cui diam. $Dm=\pi(r-x)x$, cioè

Arb. = circ. (diam. Dm).

Passando alla sfera si trova l'arbelo solido ossia

$$\textit{L'Arbeloide} = \tfrac{4}{3}\pi(r^3 - x^3 - (r-x)^3] = 4\pi(r-x)x.r:$$

dunque

Teor. *L' Arbeloide equivale al cilindro la cui base è il circolo avente per diametro* Dm, *e l'altezza il doppio diametro della sfera.*

Paragonando l'espressione dell' arbeloide con quella della sfera il cui diametro Dm, cioè con $\tfrac{4}{3}\pi(r-x)x\sqrt{(r-x)x}$, si ritrae mediante la

divisione per $4\pi(r-x)x$, $r=\frac{1}{3}\sqrt{(r-x)x}$:
quindi $x^2-rx=-9r^2$ e però
$x=\frac{1}{2}r(1\pm\sqrt{-35})$: dunque il teor. cit. non si estende alla sfera.

§. 473 Probl. Essendo AB (F.ª 103 Tav. I) un diametro qualunque di una superficie di 2.° ordine dotata di centro, DE il suo piano diametrale coniugato, da una sezione mobile, costantemente parallela a DE, si possono concepire due coni, il cui respettivo vertice sia in A, B, ed abbiano per comune direttrice la sezione de, ed in tale ipotesi i punti m, m della 2.ª intersezione costituiscono una curva variabile di forma e di posizione. Qual è il luogo geometrico di tutte le anzidette curve? Soluz.ne Presa AB ($=2a$) per Ax, l'eq. della superficie proposta è $\frac{1}{a^2}x^2+qy^2+sz^2=1$ (1), il piano della direttrice $x=\alpha$...(2) e le generatrici Ad, Bd dei coni, sono respettivamente espresse per

$$\{y=m(x-a),z=n(x-a)\};\{y=m(x+a)z=n(x+a)\}.$$

La eliminazione d'x, y, z fra l'eq.i (1), (2) e ciascuno di questi sistemi dà

$$qm^2+sn^2+\frac{\alpha+a}{a^2(\alpha-a)}=0,\ qm^2+sn^2+\frac{\alpha-a}{a^2(\alpha+a)}=0,$$

ed eliminandone m, n, si ha per l'una e l'altra superficie conica la respettiva eq.

$$qy^2+sz^2+\frac{\alpha\mp a}{a^2(\alpha\pm a)}(x\pm a)^2=0$$

ed altro non resta che ricavarne una equivalente ad entrambe e libera dalla indeterminata α, per lo chè basta moltiplicare il valore di $\frac{\alpha+a}{\alpha+a}$ dedotto dalla 1.ª per quello di $\frac{\alpha+a}{\alpha-a}$ proveniente dalla 2.ª Il risultamento

$$\frac{1}{a^4}(x^2-a^2)^2-(qy^2+sz^2)^2=0\text{, ossia}$$

$$\left(\frac{1}{a^2}x^2+qy^2+sz^2-1\right)\left(\frac{1}{a^2}x^2-qy^2-sz^2-1\right)=0,$$

presenta nel 2.º fattore il luogo richiesto, cioè l' iperboloide discontinua riferita agli stessi assi e vertici.

Partendo dall' iperboloide discontinua, si avrebbe l' ellissoide; mentre l' iperboloide continua ne dà una della stessa natura, con la differenza che il diametro reale (diverso da BA), spettante alla 1.ª si cangia nel diametro immaginario della 2.ª (*)

§. 474. Probl. Il sistema di tre piani ortogonali scivola sulla superficie $px^2+qy^2+sz^2=1$: Qual' è il luogo geometrico del vertice? Soluz.ne Rappresentando il triplice contatto in una posizione del sistema coi respettivi simboli

$(x_{\prime}, y_{\prime}, z_{\prime})$, $(x_{\prime\prime}, y_{\prime\prime}, z_{\prime\prime})$, $(x_{\prime\prime\prime}, y_{\prime\prime\prime}, z_{\prime\prime\prime})$, si ha

(*) Questo bel probl., contemplato dal Sig. *Giorgini* (Opusc. cit.) trasferisce alla Geometria di sito in triplice dimensione quello che fu da noi risciolto nel § 403.

$$px_{,}\,.x+qy_{,}\,.y+sz_{,}\,.z=1\,,$$
$$px_{,,}\,.x+qy_{,,}\,.y+sz_{,,}\,.z=1\,,$$
$$px_{,,,}\,.x+qy_{,,,}\,.y+sz_{,,,}\,.z=1\,,$$

le respettive eq.[i] de' piani, e si concepiscano condotte dall'origine le perpendicolari $p_{,}, p_{,,}, p_{,,,}$ su ciascuno. Per esprimere ch'esse, e però anche i piani anzidetti, sono ortogonali fra loro, basta assumere (452) l'eq.

$$x^2+y^2+z^2=p_{,}^2+p_{,,}^2+p_{,,,}^2\,.$$

Fatta la successiva sostituzione di $px_{,}, px_{,,}, px_{,,,}$ per A, di $qy_{,}, qy_{,,}, qy_{,,,}$ per B, ec. nelle formole del §. 360 sul fine, si ottiene

$$\cos.^2 p_{,}\hat{}x=p_{,}^2.p^2.x_{,}^2\,;\ \cos.^2 p_{,,}\hat{}x=p^2_{,,}.p^2.x_{,,}^2\,;\ \cos.^2 p_{,,,}\hat{}x=p^2_{,,,}.p^2.x^2_{,,,}\,;$$
$$\cos.^2 p_{,}\hat{}y=p_{,}^2.q.^2y_{,}^2\,;\ \cos.^2 p_{,,}\hat{}y=p^2_{,,}.q^2y^2_{,,}\,;\ \cos.^2 p_{,,,}\hat{}y=p^2_{,,,}.q.^2y^2_{,,,}\,;$$
$$\cos.^2 p_{,}\hat{}z=p_{,}^2,s^2.z_{,}^2\,;\ \cos.^2 p_{,,}\hat{}z=p^2_{,,}.s^2z_{,,}^2\,;\ \cos.^2 p_{,,,}\hat{}z=p^2_{,,,}.s^2.z^2_{,,,}\,;$$

e sommando le tre linee si ha (§. cit.) mediante la divisione per p,

$$\frac{1}{p}=p_{,}^2.\,px_{,}^2+p_{,,}^2.p.x_{,,}^2+p_{,,,}^2.p.x_{,,,}^2$$

$$\frac{1}{q}=p_{,}^2.q.y_{,}^2+p_{,,}^2.q.y_{,,}^2+p_{,,,}^2.qy_{,,,}^2$$

$$\frac{1}{s}=p_{,}^2.\,s.z_{,}^2+p_{,,}^2.\,s.z_{,,}^2+p_{,,,}^2.s.z_{,,,}^2\,.$$

Avvertasi che le coordinate del contatto debbono soddisfare alla proposta $px^2 + qy^2 + sz^2 = 1$, e sommando di nuovo si ritrarrà

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} = p_{,}^2 + p_{,,}^2 + p_{,,,}^2 : \text{dunque}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 \left(= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{s} \right) = a^2 + b^2 + c^2,$$

ed il richiesto luogo geometrico è la superficie della sfera il cui raggio$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

È chiaro che uno o due de' coefficienti p, q, s può essere negativo senza che il risultamento ottenuto soggiaccia ad eccezione. Veggasi (Opusc. cit. §. 53).

Superficie di 2.° ordine prive di centro

§. 475. Supposto $Q<0$, giacchè nell' ipot. contraria può farsi x negativa, due casi debbonsi distinguere, cioè che nell' eq. (L) del §. ossia $Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0$, abbiasi 1.° $N>0$ e $P>0$; 2.° $N>0$ e $P<0$. Nel 1.° caso le sezioni principali sono:

(I)...$Ny^2 + Pz^2 = 0$, $(Ny^2 = 2Qx, Pz^2 = 2Qx)$...(II)

La prima è il simbolo del punto (0, 0, 0) cioè dell' origine, le altre di due parabole aventi il vertice nell' origine. Le sezioni parallele al piano zy la di cui eq. è $Ny^2 + Pz^2 = 2Qh$, sono ellittiche; la superficie si stende dalla so-

la parte delle x positive, dicesi *paraboloide ellittica* e vien generata da un' ellisse variabile, i cui vertici percorrono, parallelamente ad yz, le parabole (II)

Nel 2.° caso la sezione (I) equivale al sistema di due rette che passano per l'origine: le sezioni (II) restano paraboliche ma dirette in senso contrario: tali son pure le sezioni parallele ad xz, la cui eq. è $Pz^2=2Qx-Nk^2$, ma ciò non si verifica delle sezioni parallele ad yz, espresse per $Ny^2=2Qh+Pz^2$, sezioni che sono iperbole, aventi il centro in Ax, e per assintoti le rette $Ny^2-Pz^2=0$. Le prec. sezioni sono quelle che caratterizzano la superficie per una *paraboloide iperbolica* e meritano speciale menzione. Per comodo indicheremo le superficie prive di centro con l' eq.

$$\frac{1}{2p}y^2 \pm \frac{1}{2q}z^2 = 2x \ldots \text{(III)}$$

Cercando come (453) le intersezioni di una retta

$$\{x=n_{,}z+\alpha_{,}\ ,\ y=m_{,}z+\beta_{,}\} \ldots \text{(R)}$$

e della superficie $\frac{1}{2p}y^2-\frac{1}{2q}z^2=2x$, si trova ch' esse vengono determinate dall' eq.

$$\left(\frac{m_{,}^2}{p}-\frac{1}{q}\right)z^2+4\left(\frac{1}{2p}m_{,}\beta_{,}-n_{,}\right)z+4\left(\frac{\beta_{,}^2}{4p}-\alpha_{,}\right)=0$$

e siccome l' eq.^{i}

$$\left\{\frac{m_{,}^2}{p}-\frac{1}{q}=0\ ,\ \frac{1}{2p}m_{,}\beta_{,}-n_{,}=0,\ \frac{\beta_{,}^2}{4p}-\alpha_{,}=0\right\} \ldots \text{(IV)}$$

sono conciliabili, una retta può adattarsi sulla paraboloide iperbolica.

Dalla 3.ª delle prec., ossia $\beta_{,}^{2}=4p\alpha_{,}$, apparisce che il punto $(\alpha_{,}, \beta_{,}, 0)$ della retta, esiste nella traccia parabolica $Ny^{2}=2Qx$, altrimenti espressa per $y^{2}=4px$.

Eliminando z dall'eq.^{i} R, e sostituendo il valore di $\frac{n_{,}}{m_{,}}$ tratto dalla 2.ª del sistema (IV) si ottiene

$$x-\alpha_{,}=\frac{\beta_{,}}{2p}(y-\beta_{,}),$$

e perciò la proiezione in xy della retta R coincide con la tangente (421) della traccia parabolica in detto piano. Basta ricavare $n_{,}, m_{,}$, dalle due prime del cit. sistema per riconoscere che alla retta R può sostituirsi il doppio sistema

$$\left\{x=\pm\frac{\beta_{,}}{2\sqrt{pq}}z+\alpha_{,},\ y=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}\,z+\beta_{,}\right\}\ldots(\text{V})$$

Si vede poi 1.° che una retta del primo sistema incontra tutte quelle del secondo e viceversa (p. 144) poichè indicando una qualunque retta del 2.° per

$$x=-\frac{\beta_{,,}}{2\sqrt{pq}}z+\alpha_{,,},\ y=-\sqrt{\frac{p}{q}}\,z+\beta_{,,},$$

il criterio (IV) del cit. §. diviene

$$\frac{\beta_{,}+\beta_{,,}}{2\sqrt{pq}}(\beta_{,}-\beta_{,,})=2\sqrt{\frac{p}{q}}\,(\alpha_{,}-\alpha_{,,})$$

ossia $\frac{\beta_{,}^{2}-\beta_{,,}^{2}}{4p}=\alpha_{,}-\alpha_{,,}$, eq identica in forza dell' ultima del sistema (IV); 2.° che ciascuno de' due sistemi equivale alla superficie della paraboloide iperbolica; di fatti eliminando $\alpha_{,}, \beta_{,}$, fra la 3.ª del sistema (IV) ed uno de' sistemi (V) si riproduce l' eq. $\frac{1}{2p}y^{2}-\frac{1}{2q}z^{2}=2x$.

Le due prime eq.^{i} del sist. (IV) dimostrano come (p. 147) che la paraboloide iperbolica ha un indefinito n.° di assintoti. E siccome l' eq. $Aa+Bb+C=0$ (359), facendovi $A=0, B=1$, $C=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}, b=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}$, resta soddisfatta, tutte le rette R, ed in conseguenza anche gli assintoti, sono paralleli ad uno de' piani $y=\pm\sqrt{\frac{p}{q}}.z$:

È d' altronde manifesto che per determinare una superficie assintotica, fa d' uopo assumere un rapporto fra $m_{,}, n_{,}, \alpha_{,}, \beta_{,}$, che diciamo $f(m_{,}, n_{,}, \alpha_{,}, \beta_{,})=0$, ed eliminare $m_{,}, n_{,}, \alpha_{,}, \beta_{,}$ tra $f=0$, l' eq.^{i} dell' assintoto e le due prime del sistema IV.

Saggio sulla intersezione delle superficie di 1.° e 2.° ordine

§. 476. Le coordinate essendo di 1.° grado nell' eq. del piano, la eliminazione di una coordinata fra questa e l' eq. di una superficie dell' ordine m.^{esimo} ne produce una dell' ordine stesso: tal è in conseguenza l' ordine della curva proveniente dall' intersezione dell' una e dell' altra

superficie. Per riconoscerne la natura è necessario riferirla ad un sistema di assi esistenti nel piano segante [p. 127 sist. (β)]. Così, traslocando anche l'origine, vengono introdotte cinque indeterminate, α, β, γ, θ, ψ, e può di esse profittarsi per soddisfare a qualche condizione, per es.° che la sezione sia una data curva di 1.° genere. Volendosi per es.° che la sezione sia un circolo, si trasferisca sulle prime l'origine in un punto del piano xy sostituendo in (A) $x+\alpha_{,}$, per x, $y+\beta_{,}$ per y, $z+\gamma_{,}$ per z, e si facciano servire le indeterminate $\alpha_{,}$, $\beta_{,}$, $\gamma_{,}$, alla eliminazione dell'ultimo termine: indi si faccia variare la posizione degli assi, onde liberarla dai rettangoli delle coordinate, operazione sempre possibile (p. 120) e la trasformata sia

$$fx^2+gy^2+hz^2+ix+ky+lz=0.$$

Le formole (β) del §. cit., respettivamente accresciute di α, β, γ, danno la nuova trasformata

$$(f\cos.^2\theta''\,sen.^2\theta+g\cos.^2\theta''\cos.^2\theta+h\,sen.^2\theta)t^2+$$
$$(f\cos.^2\theta+g\,sen.^2\theta)u^2+2(f-g)\cos.\theta''\,sen.\theta\cos.\theta.\,tu$$
$$\ldots\ldots+f\alpha^2+g\beta^2+h\gamma^2+i\alpha+k\beta+l\gamma=0,$$

e si elimina tu con una delle ipotesi

$$\theta''=\tfrac{1}{2}\pi,\ \theta=0,\ \theta=\tfrac{1}{2}\pi.$$

Eguagliando in ciascuna ipot. i coefficienti di t^2, u^2 si ha

$$tan.\theta=\sqrt{\frac{f-h}{h-g}},\ tan.\theta''=\sqrt{\frac{g-f}{f-h}},\ tan.\theta'=\sqrt{\frac{f-g}{g-h}};$$

e supposto $f>0$ una di tali formole è reale. Altro non resta che profittare di α, β, γ per eliminare i termini affetti da t, u, e per dare il segno negativo all'ultimo. Esistono dunque, in forza del doppio segno di $tan.\theta, tan.\theta''$, due sezioni circolari: una dicesi *subcontraria*.

Combinando, mediante la eliminazione di z, il piano $z=Hx+Iy+K$ con l'eq. $px^2+qy^2+sz^2=1$ si ha la projezione sul piano xy della curva nata dalla intersezione ed è

$$(p+sH^2)x^2+(q+sL^2)y^2+2sHLxy+2sHKx+2sLKy+sK^2-1=0\ldots(X)$$

eq. che può trasformarsi in

$$Rt^2+Su^2+Ttu=V.$$

Se il piano segante si muove parallelamente a se stesso varia K, non H nè L, e tal variazione influisce nel solo ultimo termine V dell'eq. prec.: quindi le projezioni corrispondenti alle successive sezioni sono curve simili, tali per conseguenza le sezioni stesse e similmente situate.

I diametri dell'eq. (X) sono (434)

$$\left\{y=-\frac{2sL(Hx+K)}{q+sL^2}\ ;\ x=-\frac{2sH(Iy+K)}{p+sH^2}\right\}\ldots(\Omega)$$

e nell'ipot. di $K=K'$ danno insieme le coordinate x', y' del centro della projezione, corrispondente alla sezione determinata dal valore

K'. Posto K' per K si elimini K' tra l'eq.[i] (Ω) e la risultante

$$L\left\{x(p+sH')+sHLy\right\}=H\left\{y(q+sL')+sHLx\right\}.$$

sarà la projezione della retta che contiene tutti i centri delle sezioni parallele. Basta eliminare $Hx+K$ fra l'eq. del piano e la 1.ª della (Ω) ovvero $Ly+K$ mediante la 2.ª del predetto sistema, per avere una 2.ª projezione della retta sopra indicata, retta che in tal guisa si riconosce per un diametro, poichè le sue eq.[i] essendo prive del termine costante, dimostrano ch' ella passa per l'origine. Dunque *il luogo de' centri di tutte le sezioni parallele di una superficie di 2° ordine dotata di centro, è un diametro della medesima.*

§. 477. L' intersezione di due superficie curve di 2.° ordine è sovente affetta da doppia inflessione o curvatura, qual è quella di una curva piana perfettamente flessibile, che si applichi sulla convessità di un cilindro o di un cono. L' intersezione di cui si tratta si rappresenta con due projezioni, che si ottengono eliminando una coordinata, poi un' altra, fra l' eq.[i] delle superficie date. Siccome il sistema delle projezioni $y=\varphi.x$, $z=\psi.x$, può riferirsi ad una curva nello spazio, tanto di semplice quanto di doppia curvatura, bisogna saper distinguere di qual sorta sia la curvatura della intersezione.

Mediante l' eq. di un piano si elimini una coordinata, per es.° la z, dall' eq. di una del-

le superficie proposte, e se la risultante può rendersi identica ad $y-\varphi.x=0$ l'intersezione è piana: altrimenti è di doppia curvatura. Siano le sfere

$$x^2+y^2+z^2=r^2, (x+\alpha)^2+(y+\beta)^2+(z+\gamma)^2=r_{,}^2.$$

La nota eliminazione, ove pongasi

$$r_{,}^2-r^2-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2=\lambda^2, \quad \text{dà}$$

$$4(\alpha^2+\gamma^2)x^2+4(\beta^2+\gamma^2)y^2+8\alpha\beta xy-$$

$$4\alpha\lambda^2 x-4\beta\lambda^2 y+\lambda^4-4r^2\gamma^2=0,$$

e facendo nell'eq. della 1.ª sfera

$$z=\frac{1}{G}(Hx+Ly+K), \text{ si ottiene}$$

$$(H^2+G^2)x^2+(L^2+G^2)y^2+2HLxy+2HKx+2KLy+K^2-G^2r^2=0,$$

eq. che si rende identica con la prec. con fare

$$H=2\alpha, L=2\beta, G=2\gamma, K=-\lambda^2.$$

Dunque l'intersezione di due superficie sferiche è una linea di *semplice* curvatura, esistente nel piano

$$2\alpha x+2\beta y-2\gamma z-\lambda^2=0.$$

Trattandosi di un cono e di un cilindro retto, aventi base circolare, le cui respettive eq.ⁱ sono

$$a^2(b-z)^2=b^2(x^2+y^2), (c+x)^2+(d+y)^2=e^2,$$

la solita sostituzione per z cangia la 1.ª in

$$(a^2H^2-b^2G^2)x^2+(a^2L^2-b^2G^2)y^2+2a^2HLxy+$$

$$2a^2 H(bG+K)x+2a^2 L(bG+K)y+a^2(bG+K)^2=0;$$

e perchè questa non può farsi coincidere con l' eq. del cilindro, l' intersezione è dotata di *doppia* curvatura.

§. 478. Se l'intersezione di due superficie curve è piana può effettuarsi una trasformazione di coordinate, per cui il piano segante coincida con xy: allora l'eq.[i] trasformate debbono risultare identiche nell' ipot. di $z=0$, e fatta la divisione pel coefficiente d'y^2, della forma:

$$I \ldots \begin{cases} y^2+Bxy^2+Cx^2+B'xz+B''yz+C'z^2+Dy+Ex+E'z+F=0 \\ y^2+Bxy^2+Cx^2+B_1xz+B_2yz+C_1z^2+Dy+Ex+E_1z+F=0 \end{cases}$$

Si tratta di rintracciare le condizioni da cui dipende che i termini non affetti da z, sieno respettivamente identici in ambedue le trasformate, ed a tale oggetto basta sostituire in una dell' eq.[i] proposte,

$$x+\alpha\,,\ y+\beta\,,\ z+\gamma \text{ per } x\,,\ y\,,\ z\,,$$

e cercare se possa darsi ad α, β, γ, unitamente a G, H, L, K in $Gz^2+Hx^2+Ly^2+K=0$, un valore che renda identica la projezione in xy dell' intersezione comune alle superficie ed al piano. Il probl. vien così ridotto a verificare con valori reali cinque eq.[i] fra sei indeterminate. Se ciò possa effettuarsi la comune intersezione piana esiste e viceversa.

Ottenute l' eq.[i] I si può di esse profittare per riconoscere l' esistenza e la posizione di una

2.ª intersezione piana, ed a ciò si soddisfa con prenderne la differenza:

$$z[(C_1 - C')z + (B_1 - B')x + (B'' - B_2)y + E_1 - E'] = o \ldots (W)$$

Da questa infatti, omesso il fattore $z = o$, che ci rammenta la supposta sezione mediante il piano xy, si ha l'eq. di un 2.° piano segante, in cui giacciono i punti comuni delle superficie proposte, punti che in conseguenza costituiscono una linea di semplice curvatura. Ciò peraltro suppone l'anzidetta eq. immune da ogn'incongruenza, qual si avrebbe per es.° se $C_1 = C'$, $B_1 = B'$, $B_2 = B''$.

Per cominciare dai casi più semplici vogliansi le intersezioni di una sfera e di un cono retto, di una sfera e di un'ellissoide di rivoluzione.

Nel 1.° caso si hanno l'eq.ⁱ

$$x^2 + y^2 + z = r^2 \text{ , } x^2 + y^2 - \frac{a^2}{b^2} z^2 + \frac{2a^2}{b} z = a^2 .$$

e per far sì che divengano identiche nell'ipot. di $z = o$ basta sostituire nella 1.ª $z + \gamma$ per z, e determinare γ mediante l'eq. $r^2 - \gamma^2 = a^2$.

Sostituiti i valori nella (W) divisa per z ottiensi

$$\left(\frac{r^2}{b^2} + 1\right) z - \frac{2r^2}{b} = o \text{ ossia } z = \frac{2br^2}{b^2 + r^2} .$$

Dunque si ha una 2.ª sezione circolare nel piano equidistante da xy della quantità $\frac{2br^2}{b^2 + r^2}$.

Tal sezione si riduce ad un punto se $b=r$: svanisce quando $b=\infty$, nel qual caso il cono si è cangiato nel cilindro circoscritto alla sfera.

Era facile rintracciare la 2.ª sezione, cercando qual valore deesi attribuire a z onde avere $r^2-z^2=\frac{a^2}{b^2}(b-z)^2$, poichè questa eq. conduce appunto alla formola sopra ottenuta.

Le superficie proposte essendo

$$x^2+y^2+z^2=r^2,\ x^2+y^2+\frac{a^2}{c^2}z^2=a^2;$$

si trova come sopra $\gamma=\sqrt{r^2-a^2}$ e dalla (W) si ritrae

$$\left(\frac{a^2}{c^2}-1\right)z+2\sqrt{r^2-a^2}=0 \text{ cioè } z=\frac{2c^2\sqrt{r^2-a^2}}{c^2-a^2},$$

valore assurdo se $c=a$, vale a dire se le superficie sono sferiche entrambe.

Abbiansi in 3.º luogo le superficie

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2,\ px^2+qy^2+sz^2=1,$$

e suppongasi che il piano $Hx+Ly+z=K$ contenga una curva comune alle superficie proposte (*) La projezione di questa sul piano xy, ricavandola da ciascuna delle date superficie è respettivamente

$$(1+H^2)x^2+(1+L^2)y^2+2HLxy+2H[(\gamma-K)-\alpha]x+$$

(*) Si previene qualunque eccezione supponendo ambedue le superficie proposte nello stesso angolo de' piani coordinati.

$$2[L(\gamma-K)-\beta]y+\alpha^2+\beta^2+(K-\gamma)^2 r^2=0\,,$$

$$(p+H^2s)x^2+(q+L^2s)y^2+2HLsxy-2HKsx-2LKsy+K^2s-1=0;$$

ed affinchè sieno identiche, come l'ipot. richiede, dev' essere

$$\frac{1+L^2}{1+H^2}=\frac{q+L^2s}{p+H^2s}\,,\ \frac{HL}{1+H^2}=\frac{HLs}{p+H^2s}\,,\ \frac{H(\gamma-K)-\alpha}{1+H^2}=\frac{HK\,s}{p+H^2s}\,,$$

$$\frac{L(\gamma-K)-\beta}{1+H^2}=\frac{LKs}{p+H^2s}\,,\ \frac{\alpha^2+\beta^2+(K-\gamma)^2-r^2}{1+r^2}=\frac{K^2s-1}{p+H^2s}$$

La 2.ª equiv. ad $HL(p-s)=0$ e dà $H=0$ ovv. $L=0$.

Nel 1.° caso l'eq.[i] di condizione si riducono alle seguenti:

$$L=\pm\sqrt{\frac{q-p}{p-s}}\,,\ \alpha=0\,,\ (\beta-L\gamma)p+LK(p-s)=0\ldots(1)$$

$$pr^2-p[\beta^2+(\gamma-K)^2]+sK^2-1=0\ldots(2).$$

Restano dunque due eq.[i] fra le indeterminate β, γ, c, r, e si hanno infinite coppie di piani, espressi con l'eq.[i]

$$z=\sqrt{\frac{q-p}{p-s}}\,y+K\,,\ z=-\sqrt{\frac{q-p}{p-s}}\,y+K\,.$$

Supposto $L=0$ risulta $H=\pm\sqrt{\frac{q-p}{s-q}}$, e gli anzidetti piani sono

$$z=\sqrt{\frac{q-p}{s-q}}\,y+K\,,\ z=-\sqrt{\frac{q-p}{s-q}}\,y+K\,.$$

Siccome ad L reale corrisponde H immaginario e vicev., due piani seganti, perpendicolari ad yz, danno una comune sezione circolare.

Se la posizione della sfera è data l'eq.[i] (1), (2) determinano K ed r: resta per conseguenza determinata la posizione de' due piani seganti.

Conoscendosi unicamente il raggio r, la eliminazione di K dalle cit. eq.[i] somministra.

$$pq\beta^2 + ps\gamma^2 = (1-pr^2)(p-s) \ldots (3)$$

cioè un' eq. spettante alla famiglia ellittica o iperbolica, i cui assi sono due degli assi coniugati ortogonali spettanti alla superficie $px^2 + qy^2 + sz^2 = 1$.

Data la posizione della sfera se ne ha il raggio dall' eq. (3).

La condizione da cui dipende che le sezioni sieno circoli massimi è che il piano segante passi pel centro (α, β, γ) della sfera, e tale ipot. riduce l' eq. del predetto piano a $\gamma = L\beta + K \ldots (4)$. Quando r è noto basta il sistema [(1), (2), (4)] per determinare K, β, γ, cioè la posizione della sfera e del piano segante.

Delle superficie coniche circoscritte ed inscritte.

§. 479. Essendo (α, β, γ) il vertice di un cono circoscritto ad una data superficie di 2.° ordine, si ha la distanza δ tra 'l vertice ed un

punto $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ della curva di contatto mediante l'eq. (7) del §. 457, eq. che per comodo trasformiamo in

$\mu\delta^2+2\nu\delta+\zeta=0$, scrivendo in (A) (453) 2B, 2B', ec. 2F, 2E' per B, B' ec. F, ed in cui dee supporsi (§. cit.) $\nu^2=\mu\zeta$. Questa eq. di condizione cessa di riferirsi ad una generatrice individuale e si estende a tutte, cioè alla superficie conica da essa generata, se si elimina m ed n per mezzo del sistema

$$x-\alpha=m(z-\gamma)\ ,\ y-\beta=n(z-\gamma),$$

vale a dire se si sostituisce $\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ per m, $\frac{y-\beta}{z-\gamma}$ per n, il che produce un' eq. di 2.° grado in x,y,z.

Il piano tangente nel punto $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ della curva di contatto passa per (α, β, γ): si può dunque sostituire α, β, γ per x, y, z nell' eq. (I) del §. 457. Da tal sostituzione, raddoppiando provvisoriamente B, B', B'', D, E, E' in (A) e ordinando per rapporto ad $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, nasce

$$(C\alpha+B\beta+B'\gamma+E)x_{,}+(B\alpha+A\beta+B''\gamma+D)y_{,}+$$
$$(B'\alpha+B''\beta+C'\gamma+E')z_{,}+E\alpha+D\beta+E'\gamma+F=0\ ;\ldots(1)$$

e siccome si ha la stessa eq. per qualunque altro punto dell' anzidetta curva, ne segue che

$$(C\alpha+B\beta+B'\gamma+E)x+(B\alpha+A\beta+B''\gamma+D)y\ \text{ec.}+F=0\ldots(2)$$

li contenga tutti, che rappresenti per conseguenza il piano della curva di contatto, e che la curva di cui si tratta sia piana.

Se mediante il sistema

$$x=n\lambda\delta+\alpha\ ,y=m\lambda\delta+\beta\ ,\ z=\lambda\delta+\gamma\ ,$$

si elimina x, y, z dall' eq. (2) si ottiene, per determinare la distanza δ tra il vertice ed il piano della curva di contatto, l' eq. $\nu'\delta_1+\zeta'=0$, dove ν', ζ' sono ciò che ν, ζ divengono mediante la sostituzione di α, β, γ per x_1, y_1, z_1, e di 2B, 2B' ec. per B, B' ec.

L' espressione $-\frac{\zeta'}{\nu'}$ coincide come caso particolare con quella che si ritrae dalla formola $\frac{1}{\mu'}\left\{-\nu'\pm\sqrt{(\nu'^2-\mu'\zeta')}\right\}(=\delta)$ facendovi $\nu'^2=\mu'\zeta'$, d' onde $\frac{\nu'}{\mu'}=\frac{\zeta'}{\nu'}$.

Chiamando δ', δ'' i valori di δ si trova come (435) $\delta_1\delta'-\delta'\delta''=\delta''\delta''-\delta_1\delta'$: Dunque .

Teor. *I segmenti di qualsivoglia segante ABC (F.ª 142) stanno come quelli della corda* BC, *fatti dal* piano della curva *di contatto.*

§. 480 Supponendo per comodo espressa la superficie con l' eq. $px^2+qy^2+sz^2=1$ si ha pel piano della curva di contatto l' eq.

$$p\alpha x+q\beta y+s\gamma z=1\ ,$$

e per rapporto a questo piano tre casi possono darsi: 1.° che se ne abbia l' eq.

$$Gz+Hx+Ly=1\ \ldots(3)$$

ed allora si determina il vertice del cono cir-

coscritto per mezzo dell'eq.[i] $H=p\alpha$, $L=q\beta$, $G=s\gamma$.

2.° Che fra G, H, L veng' assegnata un'eq. $F(H, L, G)=0$: 3.° Che l'eq.[i] fra i predetti coefficienti siano due $F=0$, $f=0$.

Nel 2.° caso la sostituzione di $p\alpha$, $q\beta$, $s\gamma$ dà una superficie del grado di $F=0$ ed è il luogo geometrico a cui il vertice corrisponde, mentre il piano della curva di contatto varia di posizione a tenore della legge espressa da $F=0$. Se tal legge consista per es.° nel passaggio del piano (3) pel punto (x', y', z'), esterno alla superficie, la sostituzione del valore di G, H, L, dà

$$px'\alpha+qy'\beta+sz'\gamma=1,$$

e perciò il luogo percorso dal vertice è il piano della curva di contatto, spettante al cono il cui vertice è in (x', y', z').

Nel 3.° caso il luogo geometrico è la curva comune alle superficie $F=0$, $f=0$.

§. 481. Diconsi coni inscritti quelli ch'esattamente comprendono due sezioni piane di una data superficie di 2.° ordine, e l'ispezione della F.[a] 143 invita ad immaginare che per ogni coppia di sezioni, rappresentate coi massimi loro diametri EG, CH, esistenti in uno stesso piano CEFGH, sien due le superficie coniche inscrittibili, una il cui vertice F, esteriore alle sezioni, l'altra il cui vertice D, intermedio ad esse. Spetta all'analisi di appurare l'esposta nozione, e di rintracciare quanti e dove sieno i vertici de' coni inscrittibili.

Si collochi una sezione sul piano xy; sia

$x-\alpha=n(z-\gamma)$, $y-\beta=m[z-\gamma]$, la gener.[ce]

$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=o$ la direttr.[ca]

di una superficie conica inscritta, e si avrà per esprimerla

$$A(\beta z-\gamma y)^2+B(\alpha z-\gamma x)(\beta z-\gamma y)+C(\alpha z-\gamma x)^2+$$
$$D(\beta z-\gamma y)(z-\gamma)+E(\alpha z-\gamma x)(z-\gamma)+F(z-\gamma)^2=o.$$

Questa, sottraendone $\gamma^2(A)$ dà

$$z[(A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F-C'\gamma^2)-$$
$$\gamma(2C\alpha+B\gamma+E-B'\gamma)x-\gamma(2A\beta+B\alpha+D-B''\gamma)y-$$
$$\gamma(E\alpha+D\beta+E'\gamma+2F)=o,$$

e soppresso il fattore $z=o$, relativo alla sezione in xy, resta l'eq. di un nuovo piano segante, piano che qualora sia cognito ed espresso con la formola (3), porge l'eq.[i] comparative

$$(4)\begin{cases} A\beta^2+B\alpha\beta+C\alpha^2+D\beta+E\alpha+F-C'\gamma^2=G\gamma(E\alpha+D\beta+E'\gamma+2F) \\ 2C\alpha+B\beta+E-B'\gamma=H(E\alpha+D\beta+E'\gamma+2F) \\ 2A\beta+B\alpha+D-B''\gamma=L(E\alpha+D\beta+E'\gamma+2F), \end{cases}$$

dalle quali, eccettuati i casi in cui il piano (3) esser non può trasversale, vien somministrato un doppio e reale valore di α, β, γ. Resta così esclusivamente dimostrata l'esistenza di due coni inscritti.

Dato il vertice di uno si ha dal sistema (4) la posizione del piano (3).

Può succedere che in vece de' coefficienti G, H, L, abbiasi un' eq. $F(G, H, L)=0$. Allora, esprimendo G, H, L per α, β, γ; mediante il sistema (4) si ottiene una superficie $F(\alpha, \beta, \gamma)=0$, luogo geometrico de' vertici: superficie ch'è di 2.° ordine se quello della $F(G, H, L)=0$ sia il 1.°, per es.° $[Gz_{,}+Hx_{,}+Ly_{,}=1]$; cioè se la 2.ª sezione muovasi girando intorno ad un punto fisso; e si riduce al piano (1) della curva di contatto spettante al cono circoscritto il cui vertice è in $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$, (§. antiprec.) se il predetto punto cade in xy. Di fatti si ha $z_{,}=0$, la $F=0$ diviene $Hx_{,}+Ly_{,}=1$, e sostituendovi l'espressione di H, L tratta dall' eq.^{i} 2.ª e 3.ª del sistema (4), dopo aver cangiato 2C, 2A, 2F in C, A, F, si riproduce la cit. eq. (1). (*)

Criterj per distinguere le diverse superficie rappresentate dall' eq. generale (A) (453)

§. 482. L' eq. (A) comprende nove superficie curve; cinque dotate di centro: *l'ellissoide*, la *sferoide*, la *sfera*, *l'iperboloide*, *l'iperboloide discontinua*; quattro di centro prive

(*) Chi desidera una più ampia discussione sulle superficie coniche circoscritte ed inscritte, vegga il cit. Opusc. del Sig. *Giorgini* (p. 51, 52, e 53), opuscolo interessante che onora la patria de' *Narducci* e de' *Saladini*; e dimostra quai belle speranze, essa non men che l' Italia, possono di questo giovine Geometra concepire.

la *paraboloide ellittica*, la *parabolica*, il *cilindro* ed il *cono*.

Verificata l'esistenza del centro (458) per riconoscere la specie della superficie può farsi uso della ridotta (K') (457) e dell'eq. (P')(462): Si ha:

L'ellissoide se i segni di (P') sono alternativi, perchè in tale ipot. i quadrati de' semiassi risultano positivi e perciò reali le loro radici quadrate. L'eq. (K') offre un criterio equivalente ed è

$$\left\{ Q<o\,,\ \begin{matrix}M\\N\\P\end{matrix} >o \right\}\ldots(1)$$

La *sferoide* esige che nell'ipot. (1) due de' coefficienti M, N, P sieno eguali:

La *sfera* che sia M=N=P.

L' iperboloide suppone

$$Q<o\,,\left[\begin{matrix}M\\N\end{matrix}>o\,,P<o\right]\ldots(2)$$

ovvero che l'eq. (P') presenti due variazioni di segno:

Si ha *l' iperboloide* discontinua se nelle ipot. (2) è Q>o, o se incontrasi una sola variazione nell' eq. (P)

La *paraboloide ellittica* corrisponde ad

$$M=o\,,\ N>o\,,\ P>o:$$

La *paraboloide parabolica* ad

$$M=o\,,\ N>o\,,\ P<o.$$

Le caratteristiche del cono sono $Q=\delta$ ed uno de' coefficienti $M, N, P, >\delta$.

Quelle del *cilindro* (458) $\alpha=\frac{0}{0}, \beta=\frac{0}{0}, \gamma=\frac{0}{0}$.

§. 483. Posto che si verifichi la $M=0$, esiste, per distinguere l'una dall'altra paraboloide, un criterio molto semplice, indipendente dall' eq. (P') e dalla ridotta (K).

Si sa (458) che scrivendo $2B, 2B', 2B''$ dev' essere

$$AB'^2+CB''^2+C'B^2-ACC'-2BB'B''=0\ldots(3).$$

Questa moltiplicata per $C'L^2+2B''L+A$ dà

$$[BB''-AB'+(C'B-B'B'')L]^2=(B''^2-AC')[(B'^2-CC')L^2+2(BB'-B''C)L+B^2-AC]$$

e dimostra che la funzione

$$(B''^2-AC')H^2+2H[(BB''-AB'+(C'B-B'B'')L]+$$
$$(B'^2-CC')L^2+2L(BB'-B''C)+B^2-AC\ldots(4)$$

è un quadrato. Ciò posto, se la superficie (A) si concepisce segata col piano $z=Hx+Ly+K$, si ha la projezione della sezione sul piano xy espressa con l' eq.

$$(C+2BH+C'H^2)x^2+2(B+B'L+B''H+C'HL)xy+$$
$$(A+2B''L+C'L^2)y^2 \text{ ec.}=0;$$

ed affinchè risulti costantemente ellittica o parabolica, come conviensi alla paraboloide ellittica, basta che

$$(B+B'L+B''H+C'HL)^2-(C+2BH+C'H^2)(C'L^2+2B''L+A)$$

cioè l'equivalente funzione (4), sia $<$ovv.$=0$.

A tal effetto, siccome H può essere di qualunque indefinita grandezza, deesi avere primieramente $B''^2-AC'<0$. Se ciò succede diciamo essere anche

$$B'^2-CC'<0\,,\ B^2-AC<0\,,$$

$$(B^2-CC')L^2+2(BB'-CB'')L+B^2-AC<0,$$

e perciò la funzione (4) della forma

$$-(M'H\pm N'L+L')^2\ \ldots (5)$$

Infatti l'eq. (3) moltiplicata prima per A poi per C' si trasforma in

$$(AB'-BB'')^2-(B''^2-AC')(B^2-AC)=0$$

$$(C'B-B'B'')^2-(B''^2-AC')(B'^2-CC')=0\,,$$

e sì l'una che l'altra fa vedere che all'ipot. $B''^2-AC'<0$ corrisponde $B^2-AC<0$, $B'^2-CC'<0$, e che uno di questi rapporti include gli altri due.

La funzione (4) non può essere della forma (5) senza che l'ultimo suo termine sia pur negativo ed il quadrato di un binomio $N'L+L'$. Dunque

$$(B'^2-CC')L^2+2(BB'-CB'')L+B^2-AC<0 \text{ ed } =(N'L+L')^2$$

perchè $(B'^2-AC')(B^2-AC)=(BB'-CB'')^2$ coincide con l'eq. (3)

È chiaro d'altronde ch'esistono infiniti valori di H, L, soddisfacenti ad $M'H\pm N'L+L'=0$.

I criterj per riconoscere la paraboloide ellit-

tica si riducono pertanto a due e sono, l'eq. (3) ed uno de' rapporti

$$B''^2-AC'<o, B^2-AC<o, B'^2-CC'<o.$$

Nella stessa guisa si scuopre che i criterj relativi alla paraboloide iperbolica sono: L'eq. (3) ed uno de' rapporti

$$B''^2-AC'>o, B^2-AC>o, B'^2-CC'>o.$$

Delle superficie curve che ammettono per loro generatrice la linea retta.

§. 284. Una retta che percorra una serie di successivi spazj, ciascuno in una particolar direzione, minore d'ogni quantità assegnabile, genera una superficie curva, e questa è regolare se il moto della generatrice va soggetto ad una legge costante. Noi ci proponiamo di contemplare alcune fra le innumerabili superficie curve regolari, che possono esser generate dalla linea retta. Una retta nello spazio

$$\{x=a_o z+\alpha_o, y=b_o z+\beta_o\} \dots (1)$$

resta individualmente costituita per mezzo di quattro condizioni, atte a determinare i parametri a_o, b_o, α_o, β_o, condizioni, ciascuna delle quali dee consistere in un algebrico rapporto fra i parametri stessi, ovvero in un sistema di due eq.[i] algebriche in x, y. Tre condizioni danno tre parametri espressi pel 4.°, per es.°

$$\{x = a_0 z + f a_0 \ , \ y = \varphi(a_0) z + \psi a_0 \ \} \ldots (2)$$

dove f, φ, ψ, indicano altrettante cognite funzioni di a_0. Il sistema (2) rappresenta, in forza dell' indeterminato valore di a_0, una continua serie d' infinite linee rette, che si succedono a tenore della legge risultante dalla particolare forma di f, φ, ψ, ed eliminando a_0 mediante il citato sistema, ottiensi un'eq. relativa a tutte le rette di cui sopra, e perciò esprimente la superficie ove sono comprese, e che può concepirsi generata da una retta individuale del sistema (1), la quale si aggiri nello spazio, seguendo una legge di moto, costituita dall' eq.[i] $a_0 = f.a_0$, $b_0 = \varphi.a_0$, $\beta_0 = \psi.a_0$.

Due condizioni lasciano indeterminata una delle funzioni f, φ, ψ: tali restano due di esse quando viene assegnata una sola condizione.

Una retta che passa per due punti dati soddisfa a quattro condizioni, quali sono le quattro projezioni de' punti: Lo stesso avviene di una retta che passa per un punto dato P e si appoggia su due date rette R, R', perchè dessa equivale all' intersezione de' piani, condotti, uno per P, R, l'altro per P, R'.

Per render mobile, a tenore di una certa legge, la retta prec., basta supporre che il punto P liberamente scorra lungo una retta data, ed in tale ipot. la generatrice viene obbligata ad appoggiarsi durante il suo moto sul sistema di tre rette assegnate.

Sia la generatrice (1), le rette assegnate

$$x=a_1 z+\alpha_1\ ,\ y=b_1 z+\beta$$

$$x=a_2 z+\alpha_2\ ,\ y=b_2 z+\beta_2$$

$$x=a_3 z+\alpha_3\ ,\ y=b_3 z+\beta_3\,.$$

Eliminando x, y, z, fra il sistema (1) e ciascuno de' prec. si ottengono respettivamente l'eq.[i]

$$(a_0-a_1)(\beta_0-\beta_1)-(\alpha_0-\alpha_1)(b_0-b_1)=0,$$

$$(a_0-a_2)(\beta_0-\beta_2)-(\alpha_0-\alpha_2)(b_0-b_2)=0,$$

$$(a_0-a_3)(\beta_0-\beta_3)-(\alpha_0-\alpha_3)(b_0-b_3)=0;$$

queste danno α_0, β_0, b_0, per a_0, per es.° $\alpha_0=f.(a_0)$, $b_0=\varphi(a_0)$, $\beta_0=\psi(a_0)$ e mediante la eliminazione di a_0 tra l'eq.[i] del sistema (2) si giunge ad un'eq. di 2.° grado in x, y, z, esprimente la superficie di 2.° ordine che vien descritta dalla generatrice (1).

Per evitare l' imbarazzo di una eliminazione laboriosissima, ed ottenere nel tempo stesso l'eq. finale sotto una forma molto meno complicata, si scelgano tre assi respettivamente paralleli alle generatrici, e chiamando t, u, v le nuove coordinate, posta l'origine A dovunque, si avrà

Per la paral. ad Av... [$t=g$, $u=g'$]... (t)

Per la paral. ad Au... [$v=h$, $t=h'$]... (u)

Per la paral. ad At... [$u=i$, $v=i'$]... (v)

dove g, g' ec. i', sono quantità cognite. Sieno

$$u=kt+l\,,\ v=k't+l'\,,\ k'u-kv=k'l-kl'\,,.$$

l' eq.ⁱ della generatrice, e per esprimere ch'essa incontra le $(t)\,,(u)\,,(v)$ dovrà farsi

$$g'=kg+l\,,\ h=k'h'+l'\,,\ k'i-ki'=k'l-kl'.$$

Si elimini k e k' dalla 3.ª e si avrà

$$(i'-h)tu+(h'-g)uv+(g'-i)tv+(hi-g'i')t+$$
$$(gh-hi')u+(gi-g'h')v+g'h'i'-ghi=0\,,\ldots\ \text{(I)}$$

eq. richiesta, che, salvo il grado in cui si trova, può tradursi fra le coordinate rettangole $x\,,y\,,z$, e che del pari si ottiene prendendo per direttrici

$$\{t=g'\,,u=i\}\,,\ \{t=g\,,v=i'\}\,,\ \{u=g',\,v=h\}\,;$$

circostanza notabile, da cui apparisce che la superficie (I) può essere in due diverse maniere generata mediante una retta che scorra su tre altre assegnate nello spazio. Ecco di questa bella verità, felicemente scoperta dall'insigne geometra *Monge*, una grafica dimostrazione elegantissima:

Sieno (F.ª 144) AB, CD, EF le direttrici rettilinee; *ab*, *cd*, *ef* rappresentino la generatrice in tre diverse posizioni, la media delle quali incontri CD in O. Preso in AB un punto P, la corrispondente generatrice XPY esiste nel piano PCD. Così una retta *xpy*, che passi per un punto *p* di *ab* e tocchi *cd*, *ef*, cioè che abbia per direttrici *ab*, *cd*, *ef*, giace nel piano *pcd*: ma i piani PCD, *pcd* s'intersegano perchè hanno comune il punto O: dun-

que le XY, *xy*, s' incontrano in un punto Z, e siccome ciò si verifica per rapporto a tutte le possibili generatrici respettive XY, *xy*, ne segue che l' una e l' altra generino, scorrendo sulle respettive direttrici, una stessa identica superficie (*Flauti* Op. cit. §. 287).

La superficie (I) appartiene all' immensa famiglia di quelle che i Greci dissero *plectoidi* (*) cioè *complicate*; tal è la superficie generata da una retta che scorre su tre curve date nello spazio; da una retta che muovesi con una certa legge scivolando su due direttrici, entrambe curve o rette, una retta e l' altra curva. Fa parte di quest' ultima classe la superficie del balaustro *serpeggiante*, generata da una retta AB, il cui estremo B ravvolgesi intorno ad A mentre l' estremo A percorre l' asse del cilindro retto, insistente sul circolo che ha per raggio AB (**)

§. 485 Fra le più semplici leggi, atte a regolare nello spazio il moto di una linea retta, debbonsi annoverare le seguenti:

1.° Che la generatrice scorra su due direttrici e si conservi perpendicolare ad una di esse, ovvero parallela ad un dato piano: 2.° che scorra sul perimetro di una curva e resti parallela a se stessa: 3.° che passi per un punto e non cessi di seguire il contorno di una curva data: 4.° che si aggiri circolarmente intorno ad una retta in tal guisa situata, che niun piano la contenga insieme con la generatrice.

(*) *Pappo* Lib. IV. Prop. XXIX.
(**) Veggansi le belle indagini di cui la moderna Geometria è debitrice al valoroso Geometra *V. Flauti* (*Op. cit.* §. 290. e seg.

I. Ipot. Considerando sulle prime una sola direttrice si prenda per l'asse delle z, normali al piano xy, quella che dev' essere incontrata ad angolo retto dalla generatrice.

Per esprimere ambedue le condizioni basta rappresentare la generatrice col sistema $y=cx, z=h$, ed osservare che per una determinata posizione della generatrice le quantità c, h sono costanti insieme ed insieme variabili da una posizione all'altra, per lo che $h=f.c$; e siccome $c=\frac{y}{x}$ si ha l'eq. richiesta $z=f.\frac{y}{x}$.

S'introduce la 2.ª direttrice combinando l'eq.ⁱ

$$\{y=a_1 x+\alpha_1\ ,\ z=b_1 x+\beta_1\}\ldots(3)$$

col sistema $y=cx$, $z=f.c$. La eliminazione d'x, y, z, dà $f.c=\frac{b_1\alpha_1+\beta_1(c-a_1)}{c-a_1}$, e sostituendo $\frac{y}{x}$ per c, z per $f.x$, si ottiene

$$z(y-a_1 x)=b_1\alpha_1 x+\beta_1(y-a_1 x)\ldots(4)$$

Se la 2.ª direttrice fosse una curva nello spazio si sostituirebbero le sue eq.ⁱ $F(x, y, z)=0$, $F_1(x, y, z)=0$ al sistema (3).

Da un punto D della direttrice CD (F.ª 145) si tiri la DA perpendicolare sulla 1.ª direttrice Az: per questa e per AD si conducano due piani rettangolari zAx, xAy, e si obblighi la generatrice CB a restar parallela al piano xy.

In questa ipot. dee farsi nel sistema (3) $a_1=0$; $\beta_1=0$, e chiamando x_1, y_1, z_1 le coor-

dinate del punto C, si ha $z=\frac{z_{\prime}}{x_{\prime}}$ cioè $b_{\prime}=\frac{z_{\prime}}{x_{\prime}}$, ed $a_{\prime}=y_{\prime}$. Così l' eq. (4) si riduce ad

$$x_{\prime}yz=y_{\prime}z_{\prime}.x \ldots (5)$$

ed appartiene al tetragono difforme, generato dalla CB, che scorse lungo le rette AB, CD, esistenti in diverso piano, con la condizione che sempre si conservi parallela al piano xy.

Si vedrà che un' adattata trasformazione di coordinate cangia l'eq. del paraboloide iperbolico nell' eq. (5), che in conseguenza la curvatura del tetragono difforme coincide con quella dell' anzidetto paraboloide: Infatti $x=k$ dà l' eq. di un' iperbola riferita agli assintoti; $y=h$ ov. $z=i$ danno una retta, e si sa che la retta è il limite a cui la parabola tende, ristringendosi a misura che il piano segante accostasi al lato del cono.

Passiamo intanto ad osservare che la superficie (5) può essere altresì generata dalla retta CD che scorra parallelamente al piano zx sulle direttrici BC, AD.

Sia $x=a_{0}z+\alpha_{0}$, $y=b_{0}z+\beta_{0}$ la generatrice:

L' eq.[i] di AD, cioè $x=0$, $z=0$, danno $\alpha_{0}=0$, $y=\beta_{0}$; quindi si ha per la generatrice il sistema $[x=a_{0}z, y=\beta_{0}]$. . (6) Infatti la proiezione della CD sul piano zx passa per l'origine, ed il valore d' y, atteso il parallelismo della CD a zx, è costantemente uguale a quello che corrisponde al punto C. Il sistema $z=z_{\prime}$, $y=\frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}x$, spettante alla BC, cangia il sistema (6) in $x=a_{0}z_{\prime}$, $\frac{y_{\prime}}{x_{\prime}}x=\beta_{0}$, d' onde

$a_{\circ} z_{,} . \frac{y_{,}}{x_{,}} = \beta_{\circ}$: pongasi $\frac{x}{z}$ per $\alpha_{\circ}$, $\beta_{\circ}$ per y, e si

avrà in altra guisa l'eq. (5).

Immaginando il piano BCDF, la generatrice in LG ed LE parallela alla CD, risulta il piano LEG parallelo a zx, EG parallela ad AF, e

DF : EF ossia CL : LB :: DG : GA: dunque

Teor. *La retta generatrice del tetragono storto taglia le direttrici in parti direttamente proporzionali*:

verità d'altronde evidente, perchè i punti C, D non possono giungere con moto uniforme in B, A, senza che i respettivi spazj da essi percorsi stiano come le rette CB, DA. (*)

II Ipot. Essendo $\alpha_{\circ}$, $\beta_{\circ}$ insieme costanti per una stessa generatrice, variabili insieme da una generatrice all'altra, può supporsi, come sul princ. della I Ipot., $\beta_{\circ} = f.\alpha_{\circ}$. Tra i sistemi

$$[y = a_{\circ} x + \alpha_{\circ}, z = b_{\circ} x + f.\alpha_{\circ}] \ldots (6)$$

$$[F(x, y, z) = o, F_{,}(x, y, z) =] \ldots (7)$$

il 2.° de' quali rappresenta la curva direttrice

(*) Prescindendo dall' esposta, opportunissima posizione degli assi, felicemente immaginata dal Sig. *Gaetano Giorgini*, si giunge (*Bossut* Traités de Calc. diff. et Int. T. 2.° p. 550.) ad una completa eq. di 2.° grado in x, y, z, che non senza laboriosissimo calcolo si riconduce alla forma (5).

si elimini x, y, z: dalla risultante tràggasi $f.\alpha_0$, si sostituisca nella 2.ª delle (6), ed eliminato α_0 si avrà il simbolo della superficie cilindrica la cui base vien espressa dal sist. (7). Questa sia per es.º il circolo $[x=0, y^2+z^2=r^2]$...(8) esistente nel piano yz ed avente il centro nell' origine. La nota eliminazione dà $f.\alpha_0=\sqrt{r^2-\alpha_0^2}$: la 2.ª delle (6) diviene $(z-b_0x)^2=r^2-\alpha_0^2$, e perchè $\alpha_0=y-a_0x$, ottiensi per la richiesta superficie cilindrica, l'eq.

$$(y-a_0x)^2+(z-b_0x)^2=r^2.$$

III Ipot. La generatrice che passa pel punto $(x_,, y_,, z_,)$ è

$$[y-y_,=a'(x-x_,), z-z_,=b'(x-x_,)]\dots(9)$$

e per la ragione sopra esposta si ha $b'=f.a'$: effettuata la sostituzione di $f.a'$ per b', si elimini x, y, z fra il sistema (7) ed il prec. onde riconoscere la forma di $f.a'$, e mediante la eliminazione di a' tra le due del sistema (9) si otterrà ec.

La curva direttrice essendo per es.º il circolo (8), si trova per esprimere la superficie conica di cui sopra, l'eq.

$$(xy_,-x_,y)^2+(xz_,-x_,z)^2=(x-x_,)^2r.$$

Se il cono è retto, $y_,$ e $z_,$ svaniscono, e rimane $y^2+z^2=\frac{r^2}{x_,^2}(x-x_,)^2$, dove $\frac{r}{x_,}$ è la tangente dell'angolo fatto dalla generatrice con l'asse del cono.

IV. Ipot. Sia la retta $x=a_0 z+\alpha_0$, $y=b_0 z+\beta_0$, tale che per essa ed Az non passi un piano. S'ella si muove in guisa che ogni suo punto m percorra una circonferenza (il cui raggio r) avente il centro in Az; detta δ la distanza di m da xy, siccome r varia con δ, si ha per esprimere il circolo, il sistema

$$z=\delta,\ x^2+y^2=f.\delta,$$

ed eliminando x, y, z, si ottiene

$$f.\delta=(a_0\delta+\alpha_0)^2+(b_0\delta+\beta_0)^2,$$

e perchè $\delta=z$ ed $f.\delta=x^2+y^2$, risulta

$$x^2+y^2=(a_0 z+\alpha_0)^2+(b_0 z+\beta_0)^2.$$

Non resta che togliere il termine $2(a_0\alpha_0+b_0\beta_0)z$ mediante la sostituzione di $u-a_0\alpha_0+b_0\beta_0$ per z, onde avere un' eq. compresa come caso particolare in quella dell' iperboloide ellittica, cioè l'eq. del *timpano iperbolico* di cui (§. 467 sul fine) (*)

Appendice sulle superficie di rivoluzione in generale

§. 486 Sia $[x=a'z+\alpha', y=b'z+\beta']$ ... (a) l' asse di rivoluzione,

$[\varphi(x, y, z)=0, \psi(x, y, z)=0]$ ... (b)

la curva generatrice.

(*) Veggasi l' eccellente trattato geometrico del *cilindroide* nella Geom. di Sito del prelodato Geometra V. Flauti (§. 3ɜ1. e seg.)

Il piano perpendicolare all'asse è (357) $a'x+b'y+z=\alpha_0 \ldots (c)$ e produce nella superficie richiesta una sezione circolare. S'immagini una sfera di raggio variabile, il cui centro in $(x=\alpha', y=\beta', z=o]$, punto d' xy comune all' asse di rivoluz.^{ne}, cioè una sfera la cui eq.

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+z^2=r^2:$$

e perchè un punto che muovasi sulla superficie di rivoluzione dee restare sul piano (c) e perciò sulla sfera stessa, ovverò dipartirsene e passare su d' altra sfera; α_0 ed r sono costanti insieme, nel 1.° caso, insieme variabili nel 2.°; si ha $r^2=\varphi.\alpha_0$; perciò

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+z^2=F(a'x+b'y+z)\ldots(d)$$

e l'eq. della sfera diviene

$$(x-\alpha')^2+(y-\beta')^2+z^2=F.\alpha_0\ldots(e)$$

Avvertasi che la generatrice (b) debbe incontrare tutte le sezioni circolari $[(c).(e)]$, dal che nasce la coesistenza delle $(b),(c),(e)$: che queste, eliminandone x, y, z, danno $f(\alpha_0, F.\alpha_0)=o$, cioè un'eq. che determina $F.\alpha_0$, e si concluderà che l'eq. (d), modificata a tenore della $f=o$, costituisce quella della superficie generata dalla curva (b) intorno ad (a) (*). L'eq. del timpano iperbolico (467) e

(*) La traccia dell'esposto metodo deesi al fecondissimo ingegno di *Gasparo Monge* (Feuilles d'Anal. n.° 6.).

quella del balaustro serpeggiante discendono come caso particolare dal prec. metodo.

Scelto l'asse di rivoluzione per quello delle z, l'eq. (d) si riduce ad $x^2+y^2+z^2=F.z$, dove si può cangiare $F.z-z^2$ in $\Phi. z$.

CALCOLO ALGEBRICO

LIBRO III.

TEORICA GENERALE DELL' EQUAZIONE ALGEBRICA.

CAPITOLO I.

Proprietà dell' eq. ad una sola incognita.

§ 487. La prima e fondamentale indagine relativa ad una qualsivoglia data eq.

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2}, \ldots, + p_{m-1} x + p_m = 0 \ldots . \mathrm{X}$$

ha per oggetto di assicurarsi s'ella sempre ammetta una risolvente. Per riuscirvi noi cominciamo dal supporre

$$x = \lambda(\cos.\varphi + \mathrm{sen}.\varphi\sqrt{-1}),$$

espressione suggerita dalla forma sotto cui compariscono le risolventi d' $x^2 + p_1 x + p_2 = 0$ (89) e che si adatta ai casi ove niuna risolvente è immaginaria, con fare $\varphi = 0$. Effettuata la sostituzione si ha la trasformata

$$\mathrm{P} + \mathrm{Q}\sqrt{-1} = 0, \text{ in cui}$$

$$\mathrm{P} = \lambda^{2m} \cos.2m\varphi + p_1 \lambda^{2m-1} \cos(2m-1)\varphi \ldots + p_{m-1} \lambda \cos.\varphi + p_m,$$

$$Q = \lambda^{2m} sen.2m\varphi + p_1 \lambda^{2m-1} sen(2m-1)\varphi \ldots + p_{m-1} \lambda sen.\varphi\ ,$$

e si tratta di provare l'esistenza di un real valore di λ e φ, da cui risulti $P=0$ e $Q=0$.

Dato a λ, φ un valore λ_1, φ_1, sia P_1, Q_1 quello di P, Q, e si rappresentino per P_2, Q_2 i respettivi valori che P_1, Q_1 ricevono mediante la sostituzione di $\lambda_1 + k$ per λ_1, e di $\varphi_1 + h$ per φ_1, dove h, k sieno infinitesime. Siccome nell'espressione di *sen. nh* e *cos. nh* (229 sul fine) si dee tener conto del solo 1.° termine, si ha

$$sen(n\varphi + nh) = sen.n\varphi + nh\, cos.n\varphi\ ,$$

$$cos(n\varphi + nh) = cos.n\varphi - nh\, sen.n\varphi:$$

è chiaro d'altronde che mediante la sostituzione, o successiva o simultanea, d'$y+k$, $z+h$, in una data funzione $F(y, z)$ ottiensi la stessa funzione variata $F'(y, z)$, ove si suppongono soppressi i termini affetti da k^2 ec. h^2 ec. come infinitesimi di un ordine superiore (123) Per conseguenza

$$P_2 = P_1 + \left\{ 2m\lambda_1^{2m} cos.2m\varphi_1 + (2m-1)p_1\lambda_1^{2m-1} cos(2m-1)\varphi_1 \ldots + p_{m-1}\lambda_1 cos.\varphi_1 \right\} \frac{k}{\lambda_1}$$

$$- \left\{ 2m\lambda_1^{2m} sen.2m\varphi_1 + (2m-1)p_1\lambda_1^{2m-1} sen(2m-1)\varphi_1 \ldots + p_{m-1}\lambda_1 sen.\varphi_1 \right\} h;$$

$$Q_2 = Q_1 + \left\{ 2m\lambda_1^{2m} sen.2m\varphi_1 + (2m-1)p_1\lambda_1^{2m-1} sen(2m-1)\varphi_1 \ldots + p_{m-1}\lambda_1 sen.\varphi_1 \right\} \frac{h}{\lambda_1}$$

$$+ \left\{ 2m\lambda_1^{2m} cos.2m\varphi_1 + (2m-1)p_1\lambda_1^{2m-1} cos(2m-1)\varphi_1 \ldots + p_{m-1}\lambda_1 cos.\varphi_1 \right\} k.$$

Facciasi $=$M la funzione affetta da K, $=$N quella affetta da h, onde

$$P_2 = P_1 + M\frac{k}{\lambda_1} - Nh,\ Q_2 = Q_1 + Mk + N\frac{h}{\lambda};$$

instituiscansi l' eq.^{i}

$$M\frac{k}{\lambda_1} - Nh = \pm i\ ,\ Mk + N\frac{h}{\lambda_1} = \pm i',$$

dove i, i' sono infinitesime: si prenda il segno $-$ se $P_1 > o$ e $Q_1 > o$; viceversa se $P_1 < o$ e $Q_1 < o$; $+i$ e $-i'$ se $P_1 < o$ e $Q_1 > o$ e vicev. Il valore che si ritrae per k ed h è tale che ne risulta $P_2 < P_1$, $Q_2 < Q_1$, e le differenze $P_1 - P_2$, $Q_1 - Q_2$ sono infinitesime.

S' immagini adesso la respettiva sostituzione di $\lambda_1 + k_1$, $\varphi_1 + h_1$ per λ_1; φ_1 in P_2, Q_2: S' indichi per M_1, N_1 la respettiva somma de' termini indipendenti da k_1 ed h_1, che provengono dalla variazione delle funzioni

$$M\frac{k}{\lambda_1} - Nh\ ,\ Mk + N\frac{h}{\lambda_1};$$

per M_2, N_2 la respettiva somma de' termini, che nelle varazioni di Mk, Nh, trovansi affetti da k_1, h_1, e scrivendo λ_2 per $\lambda_1 + k_1$, si avranno due eq.^{i} della forma

$$P_3 = P_2 + M_1 + M_2\frac{k_1}{\lambda_2} - N_2 h_1\ ,$$

$$Q_3 = Q_2 + N_1 + M_2 k_1 + N_2\frac{h_1}{\lambda_2}\ .$$

Pongasi $\left\{ \begin{array}{l} M_1 + M_2 \dfrac{k_1}{\lambda_2} - N_2 h_1 = \pm i \\ N_1 + M_2 k_1 + N_2 \dfrac{h_1}{\lambda_2} = \pm i' \end{array} \right\} \ldots \text{II}$

quindi si deduca il valore di k_1, h_1, e risulterà

$$P_2 - P_3 = P_1 - P_2 \,,\; Q_2 - Q_3 = Q_1 - Q_2 \ldots$$

Concepiscasi protratta all' infinito la prec. serie di successive trasformazioni, e siccome qualunque ipot. è indifferente, suppongasi $P_1 < Q_1$, che P_1, Q_1 sieno insieme n.[i] positivi, e si vedrà che inoltrando quant' occorre la serie

$$P_2 = P_1 - i, P_3 = P_2 - i = P_1 - 2i, P_4 = P_3 - i = P_2 - 2i = P_1 - 3i, \text{ec.}$$

deesi giungere ad un punto in cui sia $P_n = 0$.

Per avere anche $Q_n = 0$ altro non si richiede che determinare i' mediante la proporzione $P_1 : Q_1 :: i : i'$, poichè in questa guisa i consecutivi decrementi delle quantità P_1, Q_1, risultano ad esse proporzionali, ed all'infinito debbon produrre la simultanea loro evanescenza.

Quando la proposta non ha risolventi immaginarie, se $\varphi_1 > 0$ trovasi $h < 0$, i termini della serie Q_1, Q_2 ec. sono negativi decrescenti, ed all' infinito hanno per limite lo zero. Sia per es.[o] $x^2 - 8x + 15 = 0$.

L'eq.[i] ausiliari essendo

$$\lambda^2 \cos.2\varphi - 8\lambda \cos.\varphi + 15 = 0 \,,\; \lambda^2 \operatorname{sen}.2\varphi - 8\lambda \operatorname{sen}.\varphi = 0,$$

se si fa $\lambda = 2$ e $\varphi = 2.°$ (sessag.) ottiensi

$P_1 = 4 \cos.4.^\circ - 16 \cos.2.^\circ + 15 = 3{,}0000032$,

$Q_1 = 4 sen.4.^\circ - 16 sen.2.^\circ \quad = -0{,}2793536$:

Siccome P_2 dev' esser positivo e $< P_1$, Q_2 negativo e $< Q_1$, fa d' uopo assumere $k > 0$, $h < 0$. Sia $k = 0{,}5$; $h = -1.^\circ$

Eseguita l' operazione si trova

$P_2 = 6{,}25 \times 0{,}9993908 - 20 \times 0{,}9998477 + 15 = 1{,}249238$,

$Q_2 = 6{,}25 \times 0{,}0348995 - 30 \times 0{,}0174524 \quad = -0{,}130926$.

Supponendo $k = 0{,}75$ ed $h = -1.^\circ\, 60'$ risulta

$P_3 = 0{,}662071$, $Q_3 = -0{,}0582282$

e così in seg. sino a tanto che giungasi alle ipotesi $k = 1$, $h = -2.^\circ$ che soddisfanno ad ambedue l' eq.[i] ausiliari (*).

Relativamente all' eq. X necessariamente si verifica ch' ell' abbia o non abbia una risolvente reale : ma nell' una e nell' altra ipot. può ad essa soddisfarsi mediante la formola $\lambda(\cos.\varphi + sen.\varphi\sqrt{-1})$. Dunque

Teor. 1.° *Qualsivoglia eq. X ha una risolvente.*

Nello sviluppamento di $(a - b\sqrt{-1})^n$, dove $a = \lambda \cos.\varphi$, $b = \lambda sen.\varphi$, i termini affetti dalle potenze dispari di b sono negativi ; perciò la trasformata che si ottiene sostituendo in X , $a - b\sqrt{-1}$ per x , è della forma $P - Q\sqrt{-1} = 0$, e resta soddisfatta da' valori di a e b che danno $P = 0$ e $Q = 0$. Dunque

(*) Per vedere che l' eq.[i] I , quantunque destinate alla investigazione del teor., non alla soluzione dell' eq.[i] , danno $h < 0$ pongasi $i = 0{,}000001$; mediante il rapporto $Q_1 : P_1$ deducasi prossimamente $i' = 0{,}00001$; e siccome le cit. eq.[i] divengono

$0{,}0003152h - 4{,}0048704k = -0{,}00001$,

$8{,}0097408k + 0{,}0001576h = -0{,}000001$,

eliminando k si ritrae $h = -0{,}27$.

Teor. 2.° *$a+b\sqrt{-1}$ non può essere una risolvente della proposta senza che tale sia $a-b\sqrt{-1}$.*

§. 488. Se $x=\alpha_1$ in X si ha

$$x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}\ldots+p_{m-1}x+p_m=x^m-\alpha_1^m+p_1(x^{m-1}-\alpha_1^{m-1})+$$
$$p_2(x^{m-2}-\alpha_1^{m-2})\ldots+p_{m-1}(x-\alpha_1)+p_m(1-1)\text{; quindi}$$

$$\frac{X}{x-x_1}=\frac{x^m-\alpha_1^m}{x-\alpha_1}+p_1\frac{(x^{m-1}-\alpha_1^{m-1})}{x-\alpha_1}+p_2\frac{(x^{m-2}-\alpha_1^{m-2})}{x-\alpha_1}\ldots+p_{m-1}\frac{(x-\alpha_1)}{x-\alpha_1}$$

Ma ciascun termine del 2.° membro equivale ad una funzione intiera (49): dunque

Teor. 3.° *Ogni eq. è divisibile per $x\pm\alpha_1$ se $\pm\alpha_1$ è una sua risolvente.* (*)

§. 489. Per assicurarci se la X possa mai esser divisibile per $x\pm\mu$, qualora μ non sia una sua risolvente, giova considerare i successivi quozienti parziali, provenienti dalla divisione d'X per $x-\alpha_1$.

I primi quozienti sono

$$x^{m-1},(\alpha_1+p_1)x^{m-2},(\alpha_1^2+p_1\alpha_1+p_2)x^{m-3},$$
$$(\alpha_1^3+p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_1+p_3)x^{m-4},\ldots\ldots$$

e possiamo supporre inoltrata l'operazione sino all' n_1 esimo, essendo n_1 un n.° determinato, onde si abbia

(*) È convincente, non persuasivo, il seg. artifizio:
Sia $\frac{X}{x-\alpha_1}=X_1+\frac{R}{x-\alpha_1}$ dove R è un residuo senza x, altrimenti la divisione potrebbe proseguirsi. La moltiplicazione per $x-\alpha_1$ dà $X=X_1(x-\alpha_1)+R$, e se si suppone $x=\alpha_1$ risulta $X=0$, $x-\alpha_1=0$, quindi $R=0$ e però ec.

$$(\alpha_1^{n_1-1}+p_1\alpha_1^{n_1-2}+p_2\alpha_1^{n_1-3}\ldots+p_{n_1-2}\alpha_1+p_{n_1-1})x^{m-n_1}\ldots(1)$$

Il 1.° termine del dividendo che ha dato il quoziente (1) essendo necessariamente

$$(\alpha_1^{n_1-1}+p_1\alpha_1^{n_1-2}\ldots+p_{n_1-2}\alpha_1+p_{n_1-1})x^{m-n_1+1}\ldots(2)$$

ed alla differenza (2)$-$(1)$(x-\alpha_1)$, ossia

$$(\alpha_1^{n_1}+p_1\alpha_1^{n_1-1}+p_2\alpha_1^{n_1-2}\ldots+p_{n_1-2}\alpha_1^2+p_{n_1-1}\alpha_1)x^{m-n_1}$$

dovendosi aggiungere il termine $p_{n_1}x^{m-n_1}$ della proposta, è chiaro che il 1.° termine del nuovo dividendo comparisce sotto la forma

$$(\alpha_1^{n_1}+p_1\alpha_1^{n_1-1}+p_2\alpha_1^{n_1-2}\ldots+p_{n_1-1}\alpha_1+p_{n_1})x^{m-n_1}.$$

Ma questo diviso per x somministra.

$$(\alpha_1^{n_1}+p_1\alpha_1^{n_1-1}\ldots+p_{n_1})x^{m-(n_1+1)}\ldots\ldots(3)$$

dunque il quoziente $(n_1+1)^{esimo}$ va sottoposto alla legge che caratterizza l' n_1.^{esimo}.

Fatto $n_1+1=m$ nella formola (3) si ha il quoziente m.^{esimo} ossia l' ultimo espresso per

$$\alpha_1^{m-1}+p_1\alpha_1^{m-2}+p_2\alpha_1^{m-3}\ldots+p_{m-2}\alpha_1+p_{m-1}\ldots(4)$$

e siccome il dividendo corrispondente è

$$(\alpha_1^{m-1}+p_1\alpha_1^{m-2}\ldots+p_{m-2}\alpha_1+p_{m-1})x+p_m$$

non resta che moltiplicare il polinomio (4) per $x-\alpha_1$, e togliere il prodotto dalla prec. funzione onde avere per ultimo residuo

$$R=\alpha_1^m+p_1\alpha_1^{m-1}+p_2\alpha_1^{m-2}\ldots+p_{m-2}\alpha_1^2+p_{m-1}\alpha_1+p_m\ldots(5)$$

cioè una funzione identicamente $=0$ in forza della X se $x=\alpha_1$ (il che combina con la dimostrazione del §. antec.); ed avere una funzione che non isvanisce e non è divisibile per $x-\alpha_1$ se α_1 non soddisfa ad X: dunque

Teor. 4.° *Niuna eq. X è divisibile per $x\pm\alpha_1$ se α_1 non è una sua risolvente.*

§. 490 Sia $\frac{X}{x-\alpha_1}=X_1$, e poichè $X_1=0$ debbe avere una risolvente α_2, si può supporre $\frac{X_1}{x-\alpha_2}=X_2$: Così $X_2=0$ ha una risolvente α_3 e dà $\frac{X_2}{x-\alpha_3}=X_3$, ec. ec. sino ad X_m, funzione algebrica di 1.° grado in x. Dunque

$$X=(x-\alpha_1)X_1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)X_2=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)X_3\ldots$$
$$=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\ldots\ldots(x-\alpha_m),$$ e perciò

Teor. 5.° *Qualsivoglia eq. del grado m.*esimo *ammette un n.° m di risolventi.*

§. 491. Se due risolventi sono immaginarie la X è divisibile (487 sul fine) per $(x-a-b\sqrt{-1})(x-a+b\sqrt{-1})=(x-a)^2+b^2$, funzione positiva il cui minimo valore è b^2 (*)

(*) Sia x_1 il n.° che rende un minimo il 1.° membro dell'eq. $x^2+px+q=0$, dove $q>\frac{1}{4}p^2$. Deriva dalla natura del minimo che sostituendo $x_1\pm h$ per x_1, dove h sia piccolissima, debba risultare

$$x_1^2+px_1+q\pm(2x_1+p)h+h^2>x_1^2+px_1+q:$$

ma ciò si verifica soltanto se $2x_1+p=0$: dunque $x_1=-\frac{1}{2}p$ è il valore d'x che produce il minimo, e questi equivale a

$(-\frac{1}{2}p)^2+p\times-\frac{1}{2}p+q$ ossia $q-(\frac{1}{2}p)^2$, n.° contenuto col segno contrario sotto il radicale della nota formola

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{(\frac{1}{4}p^2-q)}\ (89).$$

Vale lo stesso d'ogn'altra coppia di risolventi immaginarie, e perciò il prodotto di tutti i fattori immaginari può rappresentarsi con una funzione d'x, costantemente positiva, che diremo V.

§. 492. Ogni eq. può ridursi (490 e 91) alla forma

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x^2-2ax+a^2+b^2)(x^2-2cx+c^2+d^2)\text{ ec.}=0$$

e due fattori semplici reali ne producono uno reale di 2.° grado: dunque

Teor. 6.° *Qualsivoglia eq. del grado $m(=2n)$ equivale al prodotto di n fattori reali di 2.° grado. Sopravanza un fattore semplice reale se $m=2n+1$.*

§. 493. Posta la X sotto la forma

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)\text{V}=0$$

sia $\alpha_1<\alpha_2$, $\alpha_2<\alpha_3$ ec. Facendo $x=k$ $(>\alpha_n)$ ciascun fattore semplice diviene un n.° positivo: supponendo $x=h(<\alpha_n$ e $>\alpha_{n-1})$ si rende negativo l'ultimo degli anzidetti fattori. Dunque il valore numerico, equivalente all'aggregato de' termini, è positivo nella 1.ª ipot., negativo nella 2.ª. Succede lo stesso se tra k ed h comprendasi un n.° dispari di risolventi reali.

L'anzidetta variazione di segno essendo d'altronde incompatibile con la natura di un'eq. le cui risolventi sieno tutte immaginarie (491) ne segue

Teor. 7.° *Che un'eq., la quale mediante la successiva sostituzione di due n.i reali h, k, per*

α, riducasi ad un n.° di segno diverso, ha per lo meno una risolvente reale fra h e k.

* §. 494 Le dimostrazioni con cui altri ha tentato di stabilire il teor. prec. si riducono, per quanto ci sembra, alle tre seguenti:

I Sia $s_1, s_2, s_3, \ldots s_n$, la respettiva somma de' termini, corrispondente ad $x=h, h+1, h+2, \ldots k$. Siccome il passaggio da h a k si suppone sottoposto ad una non interrotta graduazione, consimile dev' esser quello da s_1 ad s_n, tale cioè che non giungasi ad s_n senza percorrere tutti i valori intermedj ad s_1, s_n. Dunque ognuno de' n.^{i} $s_2, s_3, \ldots s_{n-1}$, corrisponde ad un reale valore d' x, intermedio ad h, k; quindi se $s_1<0$ ed $s_n>0$, uno de' n.^{i} $s_2, s_3, \ldots s_{n-1}$, dev' essere $=0$ e però ec.

Rispondiamo che la non interrotta graduazione de' n.^{i} $s_1, s_2, s_3, \ldots, s_n$, è un' ipot. gratuita che si smentisce con un facile sperimento. Per es.° in $x^3-12x^2+41x-42=0$ si ha

$$x=3,\ s=-2;\ x=4,\ s_2=-6;\ x=5,\ s_3=-12;$$
$$x=6,\ s_4=-12;\ x=7,\ s_5=0;\ x=8,\ s_6=30.$$

II Affinchè il valore numerico delle funzioni

$$(h-\alpha_1)(h-\alpha_2)\ldots(h-\alpha_n),\ (k-\alpha_1)(k-\alpha_2)\ldots(k-\alpha_n)$$

sia di segno diverso, bisogna che diverso sia il segno *di due fattori corrispondenti*, per es.° di $h-\alpha_2, k-\alpha_2$, ed in tal caso α_2 cade fra h e k.

Qui si prende di mira la proposizione reciproca, e gratuitamente si suppone discrepanza di segno in due fattori corrispondenti.

III Sia P la somma de' termini positivi, N quella de' negativi, e la proposta $P-N=0$ [*]. Se $x=h$ ($<k$) da $P<N$, ed $x=k$ dà $P>N$, facendo crescere x *per tutti i gradi insensibili* da h sino a k, le quantità P, N debbon crescere *per gradi insensibili*, ma più forti relativamente a P, che dall'essere $<N$ è gradualmente divenuto $>N$. Dunque necessariamente vi è fra i valori h, k un punto dove $P=N$. Vale lo stesso se $x=h$ dia $P>N$ e da $x=k$ risulti $P<N$.

Qualora uno de' n.[i] h, k sia negativo, o se tali sieno entrambi, si scelga il minimo n.° l tale, che $h+l$, $k+l$ risultino positivi; si trasformi la proposta con sostituire $y-l$ per x: i n.[i] $h+l$, $k+l$ produrranno variazione di segno nelle respettive somme de' termini, spettanti all'anzidetta trasformata in y: esisterà pertanto qualche reale valor d'y fra gli anzidetti n.[i], e perciò qualche reale valor d'x fra h e k.

Per rendere adequata la prec. argomentazione era necessario provare, 1.° che le variazioni di N, P si fanno per gradi, non già *insensibili*, ma bensì minori d'ogni quantità assegnabile e soggetti alla legge di continuità: 2.° che le successive variazioni di N, P escludano qualunque irregolarità, ovvero, che ad onta

(*) Se i segni fossero tutti positivi la proposta non avrebbe risolvente reale positiva, perchè un aggregato di quantità positive è >0; non l'avrebbe negativa, se sostituendo $-x$ per x i segni risultassero tutti negativi: in tal caso la sostituzione di h, k per x non produrrebbe variazione di segno e ciò contraddice all'ipotesi.

di questa esse non lasciano di condurre alla richiesta identità.

Senza impegnarci nella ricerca (per noi superflua) de' ripieghi con cui l'addotta argomentazione potrebbe rettificarsi, ei limitiamo a notare due verità di fatto, cioè: che ad ogn' *insensibile* variazione d' x corrisponde o può corrispondere una sensibilissima variazione di P, N: ch'essa è anche talvolta molto irregolare.

Sia $P = ax^m + a_{,}x^{m_{,}} + a_{,,}x^{m_{,,}}$ ec. e dicasi P_1 il valore di P corrispondente ad $x = h$, P_2 ciò che P_1 diviene quando si sostituisce $h + \delta$ per h, dove δ si suppone piccolissima. Risulta

$$P_2 = P_1 + (mah^{m-1} + m_{,}a_{,}h^{m_{,}-1} + m_{,,}a_{,,}h^{m_{,,}-1} \text{ ec.})\delta + \text{ec.}$$

Mentre h cresce di δ, P_1 subisce un aumento

$$= (mah^{m-1} + m_{,}a_{,}h^{m_{,}-1} \text{ ec.})\delta + \text{ec.}$$

e siccome a, $a_{,}$ ec. m, $m_{,}$ ec. posson' essere n.[i] molto grandi, apparisce che le variazioni di P_1, e lo stesso dicasi di N_1, equivalgono ad un qualsivoglia moltiplice di δ, e però ec.

Dalla semplicissima eq. $x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = 0$, facendo $x = 4$; $= 4,01$; $= 4,000001$; respettivamente si deduce

$P_1 = 228$, $P_2 = 228,891201$, $P_2 = 228,000480000 1200000$.—

Abbiamo altresì

$x = 4$) $P_1 = 228$, $N_1 = 234$; $P_2 - P_1 = 102$; $N_2 - N_1 = 108$

$x = 5$) $P_2 = 330$, $N_2 = 342$; $P_3 - P_2 = 132$; $N_3 - N_2 = 132$

$x = 6$) $P_3 = 462$, $N_3 = 474$; $P_4 - P_3 = 168$; $N_4 - N_3 = 156$

$x = 7$) $P_4 = 630$, $N_4 = 630$; $P_5 - P_4 = 210$; $N_5 - N_4 = 180$

$x = 8$) $P_5 = 840$, $N_5 = 810$; . . . .

I primi risultamenti provano che ad una insensibile variazione d' x corrisponde una sensibile variazione di P e di N, quantunque l' eq. proposta cospiri assai poco all' incremento di tali funzioni. Apparisce dai risultamenti esposti in 2.° luogo che per un certo tratto la funzione P cresce meno di N, e che in seguito acquista una sempre maggiore rapidità.

§. 495. Dal teor. (7.° §. 493) derivasi 1.° *che ogni eq. di grado dispari* $x^{2m+1}+$ ec. $=0$ *ha per lo meno una risolvente reale*, poichè $x=\infty$, $x=-\infty$ danno mutazione di segno nella somma de' termini: 2.° *che ogni eq. di grado pari* $x^{2m}+$ec.$-p_m=0$ *ne ha per lo meno due*. Infatti, la sostituzione di zero per x riduce la somma a $-p_m$, la riduce ad ∞^{2m} la sostituzione di $\pm\infty$: nel 1.° caso evvi almeno una risolvente reale fra 0, ∞; nel 2.° fra 0, $-\infty$.

Dal prec. corollario 1.° si deduce *che il n.° delle risolventi reali è pari o dispari come il grado dell' eq.* La ragione si è che nell' ipot. contraria il quoziente della proposta pel prodotto de' supposti fattori reali costituisce un' eq. di grado dispari, che ha tuttavia qualche risolvente reale.

§. 496. Effettuando le moltiplicazioni in

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_m)$$

si scuopre che p_1 equivale alla somma delle risolventi prese col segno contrario, p_2 alla somma de' prodotti binarj, p_3 de' ternarj col segno contrario, ec. e p_m è $=-\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\ldots\alpha_m$.

I coefficienti di un' eq. algebrica sono dunque *funzioni simmetriche* delle risolventi; *tali cioè che non cangiano di valore per qualunque permutazione degli elementi onde sono composte.*

L' eq.[i] $p_1 = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m$, $p_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2 \alpha_3$ ec. $p_m = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_m$, il cui n.[o] è $= m$, dimostrano 1.° che i coefficienti determinano il valore delle risolventi e vicev. 2.° che la mancanza di un termine esige diversità di segno nelle risolventi: 3.° Che ogni risolvente divide l' ultimo termine e perciò

$$X = p_m \left(\frac{x}{\alpha^1} - 1 \right) \left(\frac{x}{\alpha_2} - 1 \right) \ldots \left(\frac{x}{\alpha_m} - 1 \right)$$

4.° Che qualora in p_n successivamente si faccia $= 0$ ciascuna risolvente α_1, α_2 ec. dicendo $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots \pi_m$ i respettivi risultamenti, si ha

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \ldots + \pi_m = (m-n) p_n.$$

Di fatto, ciascun termine di p_n sussiste mentre si fa $= 0$ ciascuna delle $m-n$ risolventi da cui non è affetto: esso vien dunque ripetuto $m-n$ volte.

L' eq. che si ottiene moltiplicando ciascun termine di una qualunque data eq. X pel respettivo esponente dell' incognita, cioè

$$m x^{m-1} + (m-1) p x^{m-2} + (m-2) p_2 x^{m-3} \ldots + 2 p_{m-2} x + p_{m-1} = 0 \ldots X'$$

dicesi eq. *derivata* d' X, e ce ne occuperemo a suo luogo.

§. 497. Teor. 8.° Un' eq. di una delle forme

$$x^{2m}+p_2x^{2m-2}+p_4x^{2m-4}\ldots+p_{2m-2}x^2+p_{2m}=0$$

$$(1)\ x^m+px^{m-1}+p^2x^{m-2}+p^3x^{m-3}\ldots+p^{m-1}x+p^m=0$$

è priva di risolventi reali. Dim.ne La 1.a rappresenta un aggregato di quantità positive, qualunque valore reale $\pm a$ diasi ad x: ma un aggregato di tal natura è necessariamente >0: dunque l' eq. di cui si tratta è assurda: tal è per conseguenza il probl. a cui si riferisce, e perciò non esiste alcuna reale soluzione del medesimo. Qualunque coefficiente p^n, spettante al termine $(n+1)^{esimo}$, è nell' eq (1) $=(a_1+a_2\ldots+a_m)^n$, cioè maggiore della funzione che si ottiene combinando le risolventi n alla volta: dunque ciascun coefficiente e quindi anche l' eq. stessa, contraddice all' essenziale sua costituzione, e però ec. Vale lo stesso relativamente ad

$$x^m+x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+x^2+x+1=0,$$

in cui l' eq. (1) si trasforma sostituendo px per x.

§. 498. Teor. *Niuna frazione finita risolve un' eq. i cui coefficienti sieno intieri.* Dim.ne Sia $x=\frac{k}{i}$ e moltiplicando per i^{m-1} si avrà

$$(a)\ldots,\ \frac{k^m}{i}+p_1k^{m-1}+p_2k^{m-2}i\ldots+p_mki^{m-2}+p_mi^{m-1}=0.$$

Affinchè k sia, come si suppone, primo ad i, ciascuno de' $n.^i$ primi componenti k dev' essere

diverso da ciascuno de n.^{i} primi componenti i. Si sa d' altronde che le moltiplicazioni $k.k$, $k.k.k$, ec. non producono alcun nuovo n.° primo, ma bensì n.^{i} composti. Dunque $k.^m$ non contiene alcuno de' n^i primi componenti i ed è $\frac{k^m}{i}$ un n.° frazionario, mentre gli altri termini sono tutti intieri. Ora l' equivalenza di due n.^{i}, uno intiero l' altro frazionario, è assurda: dunque è tale l'eq. (a) e quindi anche l' ipot. $x=\frac{k}{i}$ che ad essa ci ha condotti.

§. 499. Probl. Si dimanda $\alpha_1^n+\alpha_2^n\ldots+\alpha_m^n (=s_n)$. Soluz. Il coefficiente del termine $(n+1)$.^{esimo} ne' respettivi quozienti

$$\frac{X}{x-\alpha_1},\ \frac{X}{x-\alpha_2},\ \frac{X}{x-\alpha_3},\ldots.\frac{X}{x-\alpha_m}\ \text{è (§489 § 496 n.°4.°)}$$

$$p_n+p_{n-1}\alpha_1+p_{n-2}\alpha_1^2\ldots+\alpha_1^n=\pi_1,$$
$$p_n+p_{n-1}\alpha_2+p_{n-2}\alpha_2^2\ldots+\alpha_2^n=\pi_2,$$
$$p_n+p_{n-1}\alpha_3+p_{n-2}\alpha_3^2\ldots+\alpha_3^n=\pi_3,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$p_n+p_{n-1}\alpha_m+p_{n-2}\alpha_m^2\ldots+\alpha_m^n=\pi_m.$$

La somma delle colonne dà

$$mp_n+p_{n-1}s_1+p_{n-2}s_2\ldots+s_n=(m-n)p_n,$$

cioè $s_n+p_1s_{n-1}+p_2s_{n-2}\ldots+p_{n-2}s_2+p_{n-1}s_1+np_n=0\ldots(b)$

Fiacciasi $n=1, 2, 3$, ec. e supponendo negativi i termini di rango pari si avrà

$$
(c)\ldots\begin{cases}
s_1=p_1\,;\ s_2=p_1^2-2p_2\,;\ s_3=p_1^3-3p_1p_2+3p_3\,;\\
s_4=p_1^4-4p_1^2p_2+4p_1p_3+2p_2^2-4p_4\,;\\
s_5=p_1^5-5p_1^3p_2+5p_1^2p_3+5p_1p_2^2-5p_1p_4-5p_2p_3+5p_5\,;\\
s_6=p_1^6-6p_1^4p_2+6p_1^3p_3+9p_1^2p_2^2-6p_1^2p_4-12p_1p_2p_3+6p_1p_5+6p_2p_4
\end{cases}
$$

$$-2p_2^3+3p_3^2-6p_6\,;$$

ec.

Se la proposta è priva del 2.º termine, e vedremo che ciò sempre può conseguirsi, le prec. formole divengono;

$$s_2=-2p_2\,,\ s_3=3p_3\,;\ s_4=-4(p_4-\tfrac{1}{2}p_2^2)\,;$$

$$s_5=-5(p_5-p_2p_3)\,;\ s_6=-6(p_6-p_2p_4)+3p_3^2-2p_2^3\,;\ \text{ec.}$$

Conoscendo s_1, s_2, eç. l'eq.^{i} (c) danno p_1, p_2 ec. e questo regresso è talvolta necessario.

La serie dell'eq.^{i} (c) si può proseguire finchè sia $n=m$, perchè i coefficienti dati sono p_1, p_2, ec. p_m.

Avendosi $x^4-x^3-19x^2+49x-30=0$, eq. contemplata da *Newton* nell'Arith. Univ., e le cui risolventi sono $1, 2, 3, -5$, si trova

$$s_1=1\,,\ s_2=39\,,\ s_3=-89\,,\ s_4=723\,,\ s_5=-2849;\ \text{ec.}$$

* §. 499. Per compiere l'indagine intrapresa nel §. prec. fa d'uopo soddisfare a tre quesiti e sono: I Estendere la formola (b) da m sino ad n n.º qualunque; II Trovare l'espressione di s_{-n}: III Rappresentare s_n con una formola affetta da' soli coefficienti.

Fatta la moltiplicazione della proposta per $x^{m_{\prime}}$, dove $m_{\prime}=0<m$, si applichi alla trasformata il metodo di cui sopra, e si avrà $s_{m+m_{\prime}}$, espresso per $s_{m+m_{\prime}-1}$, ec. sino ad $s_{m_{\prime}}$. Così giungesi ad s_{2m}: moltiplicando la proposta per $x^{m_{\prime\prime}}$ dove $m_{\prime\prime}=0<2m$ si ottiene s_{2m+1}, s_{2m+2}, ec. sino ad s_{4m}; ec.

Per soddisfare al 2.° quesito si moltiplichi la proposta per $x^{-m_{\prime}}$, si effettui la successiva sostituzione di a_1, a_2 ec. per x, indi la somma de' termini omologi di tutti i risultamenti, e si ritrarrà

$$s_{m-m_{\prime}}+p_1 s_{m-m_{\prime}-1}\ldots+p_{m-1}s_{1-m_{\prime}}+p_m s_{-m_{\prime}}=0;$$

eq. che facendo $m_{\prime}=1, 2, 3$ ec. dà s_{-1}, s_{-2}, ec. s_{-m}. Si ripete la stessa operazione per ottenere s_{-2m}, ec.

Pel 3.° quesito si ponga $x=\frac{1}{y}$ onde

$$1-p_1 y+p_2 y^2\ldots\pm p_m y^m=\left(\frac{1}{a_1}-y\right)\left(\frac{1}{a_2}-y\right)\ldots\left(\frac{1}{a_m}-y\right)$$

e perchè (496) $\frac{1}{a_1 a_2\ldots a_m}=1$, si avrà

$$1-p_1 y+p_2 y^2\ldots\pm p_m y^m=(1-a_1 y)(1-a_2 y)\ldots(1-a_m y),$$

e $\log.(1-p_1 y$ ec.$)=\log(1-a_1 y)+\log.(1-a_2 y)\ldots$ ec.

Si faccia il 2.° membro $=a_1 y+a_2 y^2$ ec. e siccome dev' essere (133)

$$a_1=a_1+a_2\text{ ec.};\ a_2=\tfrac{1}{2}(a_1^2+a_2^2\text{ ec.});\ a_3=\tfrac{1}{3}(a_1^3+a_2^3\text{ ec.})\ldots$$

$a_n = \frac{1}{n}(\alpha_1^n + \alpha_2^n \text{ ec.})$, e però $na_n = s_n$, basta trovare il coefficiente di y^n nella espressione di $\log(1 - p_1 y \text{ ec.})$. A tal effetto deducasi

$$\log(1-p_1 y \text{ ec.}) = \log(1-p_1 y) + \log(1 + \frac{p_2 y^2 - p_3 y^3}{1-p_1 y}\text{ ec.}) = -$$

$$\{p_1 y + {}^1/_2 p_1^2 y^2 + {}^1/_3 p_1^3 y^3 \text{ec}\} + \frac{p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ec.}}{1-p_1 y} - {}^1/_2 \left(\frac{p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ec}}{1-p_1 y}\right)^2 + \text{ec.}$$

Si osservi che

$$\frac{1}{1-p_1 y} = 1 + p_1 y + p_1^2 y^2 + p_1^3 y^3 \ldots + p_1^n y^n$$

$$\frac{1}{(1-p_1 y)^2} = 1 + 2p_1 y + 3p_1^2 y^2 + 4p_1^3 y^3 \ldots + (n+1) p_1^n y^n$$

$$\frac{1}{(1-p_1 y)^3} = 1 + 3p_1 y + 6p_1^2 y^2 + 10p_1^3 y^3 \ldots + \frac{(n+1)}{2}(n+2) p_1^n y^n$$

$$\frac{1}{(1-p_1 y)^4} = 1 + 4p_1 y + 10p_1^2 y^2 + 20p_1^3 y^3 \ldots + \frac{(n+1)}{2 \cdot 3}(n+2)(n+3) p_n y^n$$

ec. ec.

e si vedrà che facendo

$$(p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ ec.})^2 = b_1 y^4 + b_2 y^5 + \text{ec.}$$

$$(p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ ec.})^3 = c_1 y^6 + c_2 y^7 + \text{ec.}$$

ec. ec.

il coefficiente d'y^n in $\frac{p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ec.}}{1-p_1 y}$ è

$$= p_2 p_1^{n-2} - p_3 p_1^{n-3} \ldots \pm p_n ;$$

$$\text{in}\left[\frac{p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ec.}}{1-p_1 y}\right]^2 = {}^1/_2 \left[(n-3)b_1 p_1^{n-4} + (n-4)b_2 p_1^{n-5} \ldots + b_{n-3}\right]$$

$$\text{in}\left[\frac{p_2 y^2 - p_3 y^3 \text{ec.}}{1-p_1 y}\right]^3 = \frac{1}{2.3}\left[(n-4)(n-5)c_1 p_1^{n-6} + (n-5)(n-6)c_2 p_1^{n-7}\right.$$

$$\left.\ldots + 2c_{n-5}\right] \text{ ec. onde}$$

$$n a_n = p_1^n + n\{p_2 p_1^{n-2} + p_3 p_1^{n-3} \ldots + p_n\}$$

$$+ \frac{n}{2}\{(n-3)b_1 p_1^{n-4} + (n-4)b_2 p_1^{n-5} \ldots + b_{n-3}\}$$

$$+ \frac{n}{2.3}\{(n-4)(n-5)c_1 p_1^{n-6} + (n-5)(n-6)c_2 p_1^{n-7} \ldots + 2c_{n-5}\}$$

ec, ec.

* §. 500. Indicando col simbolo s_{n,n_1} la somma de' prodotti provenienti dalla moltiplicazione della potenza n.^{esima} di ciascuna risolvente α_1, α_2 ec, per la somma delle potenze n_1.^{esime} di tutte le altre, si ha

$$s_n . s_{n_1} = (\alpha_1^n + \alpha_2^n \ldots + \alpha_m^n)(\alpha_1^{n_1} + \alpha_2^{n_1} \ldots + \alpha_m^{n_1})$$

$$= \alpha_1^{n+n_1} + \alpha_2^{n+n_1} \ldots + \alpha_m^{n+n_1} (= s_{n+n_1})$$

$$+ \alpha_1^n(\alpha_2^{n_1} + \alpha_3^{n_1} \ldots + \alpha_m^{n_1}) + \alpha_2^n(\alpha_1^{n_1} + \alpha_3^{n_1} \ldots \alpha_m^{n_1}) \text{ ec. } (= s_{n,n_1})$$

$$\text{cioè} \qquad s_{n,n_1} = s_n . s_{n_1} - s_{n+n_1} .$$

Se $n_1 = n$ i termini sono eguali a due per due e si ha

$$s_{n,n} = {}^1/_2 (s_n^2 - s_{2n}) .$$

Con un metodo consimile si ottengono le seg. formole:

$$s_{n,n_1,n_2}=s_{n_2}\,s_{n,n_1}-s_{n_1,n+n_2}-s_{n,n_1+n_2}-s_{n+n_1+n_2}\,,$$

che diviene $s_{n,n,n}={}^1/_6\left(s_n.s_{n,n}-2s_ns_{2n}-s_{3n}\right)$

se $n_2=n_1=n$, nel qual caso i termini della formola antec. sono eguali a sei per sei;

$$s_{n,n_1,n_2,n_3}=s_{n_3}s_{n,n_1,n_2}-s_{n,n_1,n_2+n_3}-s_{n,n_2,n_1+n_3}-s_{n_1,n_2,n+n_3}\,;$$

$$s_{n,n_1,n_2\ldots n_m}=s_{n_m}s_{n,n_1,n_2\ldots,n_{m-1}}-s_{n,n_1,n_2\ldots,n_{m-2},n_{m-1}+n_m}-$$

$$s_{n,n_1,n_2\ldots n_{m-2}+n_m\ldots}\ldots-s_{n,n_1,n_2\ldots,n_{m-2},n_{m-1},n_1+n_m}$$

$$s_{n,n_2,n_3\ldots,n_{m-2},n_{m-1},n_1+n_m}-s_{n_1,n_2,n_3\ldots n_{m-2},n_{m-1},n+n_m}.\,(*)$$

CAPITOLO II.

Indole ed usi delle trasformazioni a cui un' eq. algebrica, affetta da una sola incognita, può sottoporsi.

§. 501. Un' eq. come sopra, se qualche suo coefficiente sia frazionario o irrazionale, deesi modificare in guisa, che senz' alterarne le risolventi riducasi a forma intiera e razionale. Effettuate queste trasformazioni, che diremo di

(*) Queste formole con tutte le operazioni analoghe furono da noi esposte in una Mem.ª inserita nel T. XII. della Soc. Ital. Possono consultarsi le Opere di *Waring* intitolate: Miscell. Anal. e Meditat. Algebr. Probl. 3.°

1.ª classe, è sovente necessario agli usi analitici cangiare la ridotta in un'altra, le cui risolventi abbiano a quelle della prec. un determinato rapporto. Noi comprendiamo la teorica relativa a questa 2.ª classe, ne' seg. probl.

Trasformare una data eq. X in un'altra, le cui risolventi equivalgano 1.° ad $x \pm d$; 2.° a hx: 3.° ad $\frac{1}{x}$; 4.° alle differenze tra' valori d'x: 5.° alle somme binarie de' predetti valori: 6.° ad x^n: 7.° ad una data funzione delle risolventi della proposta (*).

§. 502. Probl. 1.° l'ipot. $x = y + d$ cangia la proposta X .....$px^m + p_1 x^{m-1} \ldots + p_m = 0$ in

$$\begin{array}{l|l|l|l}
py^m + mpd & y^{m-1} + \frac{m}{2}(m-1)pd^2 & y^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}pd^3 & y^{m-3} \ldots \\
\quad + p_1 & \quad + (m-1)p_1 d & \quad + \frac{1}{2}(m-1)(m-2)p_1 d^2 & \\
 & \quad + p_2 & \quad + (m-2)p_2 d & \\
 & & \quad + p_3 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l|l|l}
+\frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3\ldots n}p\,.d^n & y^{m-n} + \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n+1)}p\,.d^{n+1} & y^{m-(n+1)} \ldots \\
+\frac{(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]p_1\,.d^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} & + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots n}p_1\,.d^n & \\
+\frac{(m-2)(m-3)\ldots[m-(n-1)]p_2\,.d^{n-2}}{1.2.3\ldots(n-2)} & + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots(n-1)}p_2\,.d^{n-1} & \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot & \\
+ [m-(n-1)]p_{n-1}d & + (m-n)p_n\,.d & \\
+ p_n & + p_{n+1} &
\end{array}$$

(*) È laborioso e meno interessante il probl. contemplato da *Waring*, per cui le risolventi della trasformata debbon' essere i prodotti binarj, ternarj, ec. di quelle della proposta.

$$\left.\begin{array}{l|l|l}
+\tfrac{1}{2}\,m(m-1)\;p\;.\,d^{m-2} & y^2+\quad mp\;.\,d^{m-1} & y+p\;.\,d^m \\
+\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)p_1\,.\,d^{m-3} & +(m-1)p_1\,.\,d^{m-2} & +p_1\,.\,d^{m-1} \\
+\tfrac{1}{3}(m-2)(m-3)p_2\,.\,d^{m-4} & +(m-2)p_2\,.\,d^{m-3} & +p_2\,.\,d^{m-2} \\
\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\
+\quad 3\,p_{m-3}d & +\quad 2p^{m-2}d & +p_{m-1}d \\
+\quad p_{m-2} & +\quad p_{m-1} & +p_m
\end{array}\right\}=0$$

Questa trasformata la indichiamo per

$$Y_m \ldots py^m + q_1y^{m-1} + q_2y^{m-2} \ldots + q_{m-1}y + q_m = 0,$$

ed osserviamo 1.° che tutte le sue risolventi reali sono negative se d supera la massima risolvente reale positiva della X_m (490); che tutte le ha positive se si fa $x+d=y$ e si assume d maggiore della massima negativa d' X_m : 2.° che l' ultimo termine equivale alla proposta ove si ponga d per x : 3.° che il coefficiente d'y^{m-n} è la *funzione derivata* (496) di quello di $y^{m-(n+1)}$, divisa per $m-n$; laonde il coefficiente d'y è la derivata di quello d'y^0, cioè di $pd^m + p_1d^{m-1} \ldots + p_m$, ossia, della proposta nell' ipot. d' $x=d$; il coefficiente d' y^2 è la derivata del coefficiente d' y, divisa per 2, cioè la semi-derivata 2.ª della proposta nell ipot. d'$x=d$; il coefficiente d' y^3 è la derivata di quello d' y^2, divisa per 3, cioè la derivata 2.ª del coefficiente d' y, divisa per 2 . 3. . . . il coeff. d' y^{m-2} è la derivata di quello d' y^{m-3} divisa per $m-2$; il coeff. d' y^{m-1} è la derivata di quello d' y^{m-2} divisa per $m-1$; e finalmente il

coefficiente d' y^m coincide con la derivata di quello di y^{m-1} divisa per m.

§. 503 Indicando per
D_m l' eq. $pd^m + p_1 d^{m-1}$. ec. $+ p_m = 0$,
per D'_m la sua derivata 1.ª; per D''_m la derivata 1.ª di D'_m, 2.ª di D_m, ec. risulta

$$q_m = D_m,\ q_{m-1} = D'_m,\ q_{m-2} = {}^1 D''_m;\ q_{m-3} = \frac{1}{2.3} D'''_m, \ldots$$

$$q_1 = \frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)} D_m^{(m-1)},$$

e perciò, dicendo l un n.º intiero $<m$, e rovesciando l'ordine de' termini, la Y_m può mettersi sotto la forma

$$Z_m \ldots \left\{ \begin{array}{l} D_m + D'_m . y + {}^1/_2 D''_m . y^2 + \frac{1}{2.3} D'''_m . y^3 \ldots + \frac{1}{2.3\ldots l} D_m^{(l)} . y^l \ldots \\ + \frac{1}{2.3\ldots(m-1)} D_m^{(m-1)} . y^{m-1} + p y^m = 0 \ (*) \end{array} \right.$$

Sostituendo 0, 1, 2 ec. per m in $pd^m + p_1 d^{m-1}$ ec. e in D_m, si ha

(*) Notisi che questa si cangia in

$$D'_m u^{m-1} + {}^1/_2 D''_m u^{m-2} + \frac{1}{2.3} D'''_m u^{m-3} \ldots + \frac{1}{2.3\ldots(m-1)} D_m^{(m-1)} u + p = 0$$

se si fa $y = \frac{1}{u}$ e $d = x$.

$D_0 = p$

$D_1 = pd + p_1 = dD_0 + p_1$

$D_2 = pd^2 + p_1 d + p_2 = dD_1 + p_2$

$D_3 = pd^3 + p_1 d^2 + p_2 d + p_3 = dD_2 + p_3$

$D_4 = pd^4 + p_1 d^3 + p_2 d^2 + p_3 d + p_4 = dD_3 + p_4$

. . . .

$D_m = pd^m + p_1 d^{m-1} + p_2 d^{m-2} \ldots + p_m = dD_{m-1} + p_m$; quindi

$D'_1 = p$

$D'_2 = 2pd + p_1 = dD'_1 + D_1$

$D'_3 = 3pd^2 + 2p_1 d + p_2 = dD'_2 + D_2$,

$D'_4 = 4pd^3 + 3p_1 d^2 + 2p_2 d + p_3 = dD'_3 + D_3$

. . . .

$D'_m = mpd^{m-1} + (m-1)p_1 d^{m-2} + (m-2)p_2 d^{m-3} \ldots p_{m-1} = dD'_{m-1} + D_{m-1}$

Nella stessa guisa

$D''_2 = 2p$

$\frac{1}{2} D''_3 = \frac{1}{2}(2.3\, pd + 1.2 p_1) = 3pd + p_1 = \frac{1}{2} dD''_2 + D'_2$,

$\frac{1}{2} D''_4 = \frac{1}{2}[3.4 pd^2 + 2.3 p_1 d + 2p_2] = 6pd^2 + 3p_1 d + p_2 = \frac{1}{2} dD''_3 + D'_3$,

$\frac{1}{2.3} D'''_4 = \frac{1}{2.3} d\, D'''_3 + \frac{1}{2} D''_3$, $\frac{1}{2.3} D'''_5 = \frac{1}{2.3} dD'''_4 + \frac{1}{2} D''_5$, etc.

In generale $D^{(n)}_m = dD^{(n)}_{m-1} + nD^{(n-1)}_{m-1}$.

Con questi principj si costruisce il seg. prospetto:

$$(\mathrm{D})\ldots\left\{\begin{array}{l} d \,|\, \underline{p \;,\; p_1 \;,\; p_2 \;,\; p_3 \;,\; p_4 \;,\; p_5 \;,\; \ldots\; p_m \;,} \\ \qquad p \;,\; \mathrm{D}_1 \;,\; \mathrm{D}_2 \;,\; \mathrm{D}_3 \;,\; \mathrm{D}_4 \ldots\; \mathrm{D}_{m-1} \;,\; \mathrm{D}_m \ldots (1) \\ \qquad\quad p \;,\; \mathrm{D}'_2 \;,\; \mathrm{D}'_3 \;,\; \mathrm{D}'_4 \ldots\; \mathrm{D}'_{m-1} \;,\; \mathrm{D}'_m \ldots (2) \\ \qquad\qquad p \;,\; \tfrac{1}{2}\mathrm{D}''_3 \;,\; \tfrac{1}{2}\mathrm{D}''_4 \ldots\; \tfrac{1}{2}\mathrm{D}''_{m-1} \;,\; \tfrac{1}{2}\mathrm{D}''_m \ldots (3) \\ \qquad\qquad\quad p \;,\; \tfrac{1}{2.3}\mathrm{D}'''_4 \ldots\; \tfrac{1}{2.3}\mathrm{D}'''_{m-1} \;,\; \tfrac{1}{2.3}\mathrm{D}'''_m \ldots (4) \\ \qquad\qquad\qquad p \;\ldots\ldots \qquad \tfrac{1}{2.3.4}\mathrm{D}^{\mathrm{IV}}_m \ldots (5) \\ \qquad\qquad\qquad\quad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad \ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \dfrac{1}{2.3\ldots(m-1)}\mathrm{D}^{(m-1)}_m \ldots (m) \end{array}\right.$$

dove il termine n.^{esimo} di una linea orizzontale (essendo $n>1$) equivale all' antec. moltiplicato per d, più quello che gli sovrasta nella linea superiore. In ogni caso basta costruire il prospetto analogo per avere con facilità e prontezza

$$\mathrm{D}_m = q_m \,,\; \mathrm{D}'_m = q_{m-1} \,,\; \tfrac{1}{2}\,\mathrm{D}''_m = q_{m-2} \,,\; \ldots\; \frac{1}{2.3\ldots(m-1)}\mathrm{D}^{(m-1)}_m = q_1 \,,$$

cioè la trasformata Y_m.

Diciamo *derivativa* l' operazione per cui ottiensi il prospetto (D).

Quando $d=1$ esso prende una forma più semplice, il cui termine generale dipende da quello de' n.^{i} figurati (§. 153 e T. 3.° sul fine) ed è

$$(\Delta)\begin{cases} p\,,\quad p_1\,,\quad p_2\,,\quad p_3\,,\;\ldots\ldots\; p_m \\ p\,,\; p+p_1\,,\; p+p_1+p_2\,,\; p+p_1+p_2+p_3\,, \\ p\,,\; 2p+p_1\,,\; 3p+2p_1+p_2\,,\; 4p+3p_1+2p_2+p_3\,, \\ p\,,\; 3p+p_1\,,\; 6p+3p_1+p_2\,,\; 10p+6p_1+3p_2+p_3\,, \\ p\,,\; 4p+p_1\,,\; 10p+4p_1+p_2\,,\; 20p+10p_1+4p_2+p_3\,, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ p, mp+_1, \frac{m(m+1)}{1\,.\,2}p+mp_1+p, \ldots\ldots \frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}p\ldots+mp_{n-2}+p_{n-1} \end{cases}$$

Il termine generale dell' ultima linea è la formola esprimente la somma m.^{esima} degli n primi termini della serie $p\,,p_1,\ldots.p_{n-1}$, ed il prospetto (Δ) costituisce il generico simbolo de' particolari prospetti, che tre anni dopo la pubblicazione dell'insigne Mem.ª del Cav.r *Ruffini* sulla determinaz.ne delle risolv. dell' eq.i numer. di qual. gr. (Mem.ª premiata dalla Soc. Ital.) il D.r *Budan* propose ai Geometri col suo *Nouv. Méth. pour la résolut. des. éq. numér. ec. Paris* 1807, ove (§. 20) sulla parola si stabiliscono come nuovi i seg. teoremi.

I. La somma m.^{esima} degli n primi termini componenti la serie $p\,,p_1\,,p_2\ldots.p_{n-1}$ è

$$=\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots(m-1)}p\ldots.+mp_{n-2}+p_{n-1}$$

II. La trasformata Y_m (502) facendovi $d=1$, ha per coefficienti successivi, cominciando dall'ultimo termine, la somma prima

di tutti quelli della proposta, cioè $p+p_1+p_2 ... +p_m$; la somma 2.ª di essi, eccettuato l' ultimo ossia $mp+(m-1)p_1+(m-2)p_2 ... +2p_{m-2}+p_{m-1}$; la somma 3.ª prescindendo dagli ultimi due, ec. teoremi d' altronde adequatamente espressi e dimostrati dai respettivi sistemi (D), (Δ). (*)

Abbiasi per es.° l'eq. $x^5-4x^3-12x^2+9x+10=0$, e vogliasi la trasformata Y_m nell' ipot. che debba essere $x-d=x-2$. Effettuate le sostituzioni nel sistema (D) si ha

2	1 ,	0 ,	-4 ,	-12 ,	9 ,	10
	1 ,	2 ,	0 ,	-12 ,	-15 ,	-20
		1 ,	4 ,	8 ,	4 ,	-7
			1 ,	6 ,	20 ,	44
				1 ,	8 ,	36
					1 ,	10
						1

e perciò $y^5+10y^4+36y^3+44y^2-7y-20=0$.

L' applicazione del sistema (Δ) è meno spedita perchè richiede le seg. operazioni:

$$1+0-4-12+9+10$$
$$1+1-3-15-6+4$$
$$1+2-1-16-22$$
$$1+3+2-14$$
$$1+4+6$$
$$1+5$$
$$1$$

(*) Il metodo di *Budan* sarà da noi discusso nel T. IV.

1.ª trasf.ª $y_{,}^{5}+5y_{,}^{4}+6y_{,}^{3}-14y_{,}^{2}-22y_{,}+4=0$:

$1+5+6-14-22+4$
$1+6+12-2-24-20$
$1+7+19+17-7$
$1+8+27+44$
$1+9+36$
$1+10$
1

2.ª trasf.ª $y^{5}+10y^{4}+36y^{3}+44y^{2}-7y-20=0$.

La prolissità diviene successivamente più incomoda a misura che d aumentasi: e si rende necessario qualche compendioso artifizio.

§. 504 Per soddisfare all'ipot. $d=\frac{\lambda}{\mu}$ si assume la serie direttrice $p, p_{1}\mu, p_{2}\mu^{2}, \ldots, p_{m}\mu^{m}$ e posto λ per d, respettivamente si moltiplicano i n.i

D_{m}, D'_{m}, D''_{m}, ec. per $\frac{1}{\mu^{m}}, \frac{y}{\mu^{m-1}}, \frac{y^{2}}{\mu^{m-2}}$, ec.

Di fatti, sostituendo $\frac{\lambda}{\mu}$ per d in Y_{m} risulta

$$q_{m}=\frac{1}{\mu^{m}}(p\lambda^{m}+p_{1}\mu\lambda^{m-1}+p_{2}\mu^{2}\lambda^{m-2}\ldots+p_{m-1}\mu^{m-1}\lambda+p_{m}\mu^{m})$$

$$q_{m-1}=\frac{1}{\mu^{m-1}}(mp\lambda^{m-1}+(m-1)p_{1}\mu\lambda^{m-2}+(m-2)p_{2}\mu^{2}\lambda^{m-3}\ldots$$
$$\ldots+2p_{m-2}\mu^{m-2}\lambda+p_{m-1}\mu^{m-1})$$

$$q_{m-2}=\frac{1}{\mu^{m-2}}\left[\frac{m(m-1)}{2}p\lambda^{m-2}+\frac{(m-1)(m-2)}{2}p_1\mu\lambda^{m-3}\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+3p_{m-3}\mu^{m-3}\lambda+p_{m-2}\mu^{m-2}\right];$$

ec. ec,

Trattandosi di sostituire $d+\frac{y}{\mu}$ in luogo d'x, e volendo la trasformata sotto forma intiera, basta moltiplicare i successivi termini della Y_m per $1, \mu, \mu^2 \ldots \mu^m$.

Se vuolsi per es.° $x=y+2$ in $2x^3-8x^2-6x+5=0$ si deduce sulle prime
$D_3=-23$, $D'_3=-14$, $\frac{1}{2}D''_3=4$, $\frac{1}{6}D'''_3=2$,
cioè $2y^3+4y^2-14y-23=0$; indi si cangia y in $\frac{y}{10}$ scrivendo

$$2y^3+40y^2-1400y-23000=0.$$

Per ottenere il valor di q_m, cioè l'aggregato de' termini corrispondente ad $x=\frac{\lambda}{\mu}$, giova decomporre l'operazione nella maniera seg.

$$p\lambda+p_1\mu=r_1,\ r_1\lambda+p_2\mu^2=r_2,\ r_2\lambda+p_3\mu^3=r_3,\ldots r_{m-1}\lambda+p_m\mu^m=r_m$$

e si ha speditamente $q_m=\frac{r_m}{\mu^m}$.

La proposta essendo per es.°
$2x^5+3x^4-6x^2+5x-12=0$ e $\lambda=2$, $\mu=3$,

si ha $r_1=2.2+3.3=13$; $r_2=13.2+0.9=26$,
$r_3=26.2-6.27=-110$; $r_4=-110.2+5.81=185$,
$r_5=185.2-13.243=-2789$ e $q_5=-\frac{2789}{243}$.

§. 505 Nell' ipot. che le risolventi α_1, α_2 ec. di una data eq.

$$x^m+p_1x^{m-1}\ldots+p_{m-1}x+p_m=0\ldots X$$

sieno reali ed $\alpha_1<\alpha_2$, $\alpha_2<\alpha_3$ ec. se si cangia y in x e si sostituisce α_1, α_2 ec. per d, l'ultimo termine della Y_m (502) svanisce, ed il penultimo, divisa tutta la trasformata per x, coincide con X′ (496) dove in luogo d' x siasi respettivamente sostituito α_1, α_2 ec. ed in forza del §. 490 somministra l' eq.ⁱ

$$m\alpha_1^{m-1}+(m-1)p_1\alpha_1^{m-2}\ldots+p_{m-1}=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\text{ ec. }\ldots A_1$$

$$m\alpha_2^{m-1}+(m-1)p_1\alpha_2^{m-2}\ldots+p_{m-1}=(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)\text{ ec. }\ldots A_2$$

$$m\alpha_3^{m-1}+(m-1)p_1\alpha_3^{m-2}\ldots+p_{m-1}=(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\text{ ec. }\ldots A_3$$

. . . .

$$m\alpha_m^{m-1}+(m-1)p_1\alpha_m^{m-2}\ldots+p_{m-1}=(\alpha_m-\alpha_1)(\alpha^m-\alpha_2)\text{ ec. }\ldots A_m.$$

Ma ciascuno de' prodotti A_1, A_2, A_3 ec. ha segno diverso dal prec. Dunque l' aggregato de' termini d' X′ cangia segno nel passaggio dall' una all' altra delle ipotesi $x=\alpha_1$, $=\alpha_2$, ec. perciò :

Teor. *Le risolventi della derivata* X′ *sono reali se tali sono quelle della primitiva* X *e vicev.*, *e le risolventi di questa equivalgono ad altrettanti limiti delle risolventi della derivata.*

La X′ egualmente si ottiene se ai successivi moltiplicatori m, $m-1$, $m-2$, ... 3, 2, 1 si sostituiscono le respettive quantità

$l+mn\,,\; l+(m-1)n\,,\; l+(m-2)n, \ldots\, l+2n\,,\, l+n\,,\, l$:

poichè la trasformata è della forma

$$l\,(x^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}\ldots+p_m)+nx(mx^{m-1}+(m-1)p_1x^{m-2}\ldots+p_{m-1})=0$$

e la 1.ª parte si dee sopprimere come equivalente ad $l.\,X=0$.

Può anche supporsi $l=0$, $m=0$, $n=-1$ ed in tal caso la progressione moltiplicatrice diviene $0\,,\,1\,;\,2\,,\ldots.\,m$.

§. 506. Moltiplicando successivamente per

$$\left.\begin{array}{l} 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots.\,m \\ 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots.\,m-1 \\ 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots.\,m-2 \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ 0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\ldots.\,m-n \end{array}\right\}\ \text{un' eq. della forma}$$

$$x^m+p_1x^{m-1}\ldots\pm p_nx^{m-n}\pm p_{n+1}x^{m-(n+1)}\ldots+p_m=0\,,$$

quella della trasformata è

$$\pm h_nx^{m-n}\pm h_{n+1}x^{m-(n+1)}\ldots+h_m=0\,;$$

e mediante la successiva moltiplicazione per

$$m-n\;,\; m-n+1\;,\ldots.\,2\,,\,1\,,\,0$$
$$m-n-1\;,\; m-n-2\;,\ldots.\,2\,,\,1\,,\,0$$
$$.\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

$m\text{-}n-(m\text{-}n\text{-}2)\,,\, m\text{-}n\text{-}(m\text{-}n\text{-}1)\,, \ldots.\; 0$, cioè $2,1,0$,

se ne deduce $\pm\,Hx^{m-n}\pm H_1x^{m-n-1}=0$, ossia

$Hx^2+H_1=0$, eq. che ha le risolventi immaginarie. Dunque

Teor. *Le risolventi di un' eq. ove manchi un termine, ed i contigui abbiano lo stesso segno, non sono tutte reali.*

§. 507 Se l' eq.

$$px^m+p_1x^{m-1}\ldots-p_rx^{m-r}\ldots+p_{m-1}x+p_m=0\ldots\ (a)$$

dove p_r è il massimo fra i coefficienti negativi, successivamente si trasforma in

$$\left.\begin{array}{l}
px^m+(p_r+p_1)x^{m-1}+(p_r+p_2)x^{m-2}\ldots-p_r(x^{m-1}+x^{m-2}\ldots+1)=0\\
px^m+p_1x^{m-1}+(p_r+p_2)x^{m-2}+(p_r+p_3)x^{m-3}\ldots-p_r(x^{m-2}\ldots+1)=0\\
px^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}+(p_r+p_3)x^{m-3}+(p_r+p_4)x^{m-4}\ldots-p_r(x^{m-3}\ldots+1)=0\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
px^m+p_1x^{m-1}+p_2x^{m-2}\ldots+p_{m-1}x+(p_r+p_m)x^0-p_r=0
\end{array}\right\}(b)$$

e s' indica per S la respettiva somma de' termini (sempre positivi) che sono affetti da un coefficiente della forma p_r+p_n, chiamando X_m il 1.° membro dell' eq. (a), si ha respettivamente

$$\left.\begin{array}{ll}
X_m=px^m+S-p_r\dfrac{x^m-1}{x-1}\ \ldots\ldots & (1)\\
X_m=(px+p_1)x^{m-1}+S-p_r\dfrac{x^{m-1}-1}{x-1}\ \ldots\ldots & (2)\\
X_m=(px^2+p_1x+p_2)x^{m-2}+S-p_r\dfrac{x^{m-2}-1}{x-1}\ldots\ldots & (3)\\
\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
X_m(px^{m-1}+p_1x^{m-2}\ldots+p_{m-1})x+S-p_r\dfrac{x-1}{x-1}\ldots & (m)
\end{array}\right\}(c)$$

Ma dato ad x un valore d, reale e >1, nella quale ipot. giova sostituire ad X_m il simbolo D_m e si ha

$$D_0=p\,,\ D_1=D_0d+p_1\,,\ D_2=D_1d+p_2\,,\dots$$

$D_n=D_{n-1}d+p_n$, il rapporto $p=o>\frac{p_r}{d-1}$ produce nella formola (1)

$$pd^m>p_r\frac{d^m-1}{d-1}\ \text{ e dà } D_m>0\,;$$

il rapporto $pd+p_1(=D_1)=\delta>\frac{p_r}{d-1}$ produce nella formola (2)

$$(pd+p_1)d^{m-1}>p_r\frac{d^{m-1}-1}{d-1}\ \text{ e dà } D_m>0:$$

il rapporto $pd^2+p_1d+p_2\ (=D_2)=\delta>\frac{p_r}{d-1}$ produce nella (3)

$$(pd^2+p_1d+p_2)\,d^{m-2}>p_r\frac{d^{m-2}-1}{d-1}\ \text{ e dà } D_m>0\,;\ \text{ec.}$$

Dunque

Teor. *Se una delle funzioni* $D_0, D_1, D_2, \dots D_{m-1}=\delta>\frac{p_r}{d-1}$, il valore d dà $D_m>0$, e succede lo stesso qualora si abbia $D_n=0$, (dove $n<m$) e $p_{n+1}>0\,, p_{n+2}>0\,,\dots p_m>0$; poichè

$D_{n+1}(=D_nd+p_{n+1})=p_{n+1}, D_{n+2}(=D_{n+1}d+p_{n+2})=p_{n+1}d+p_{n+2}$ ec. ec. sino ad $n+i=m$.

§. 508. Se D_n non $< \frac{p_r}{d-1}$ coesista coi rapporti $D'_n > 0$, $D''_n > 0$; ... $D_n^{(n-1)} > 0$ il 1.° membro della Z_m (503) si conserva positivo, qualunque valor reale fra o ed ∞ diasi ad y: perciò d supera (493) la massima risolvente reale positiva della proposta eq. (a): ed è chiaro che tal proprietà compete alle risolventi dell'eq.^{i} comprese nella $D_n = \frac{p_r}{d-1}$, cioè

$$pd-(p+p_r)=0,$$

$$pd^2+(p_1-p)d-(p_1+p_r)=0,$$

$$pd^3+(p_1-p)d^2+(p_2-p_1)d-(p_2+p_r)=0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$pd^{m-n+1}+(p_1-p)d^{m-n}+(p_2-p_1)d^{m-n-1}+$$
$$(p_3-p_2)d^{m-n-2}\ldots-(p^{m-n}+p_r)=0,$$

purchè la 3.^{a} coesista con

$D'_2 > 0$; la 4.^{a} con $D'_3 > 0$, $D''_3 > 0$; ec.

Dunque $d =$ ovv. $> \frac{p_r}{p} + 1$ dà $D_m > 0$: e se $p=1$, il che può sempre ottenersi come vedremo, si ha

Teor. *Che il massimo coefficiente negativo accresciuto dell'unità, supera la massima risolvente reale positiva.*

§. 509. Nell'ipot. $x=1$ le formole (b) sono comprese in

$$D_m = p + p_1 + p_2 \ldots + p_{n-1} + S_1 - (m - n + 1) p_r$$

e si ha $D_m > 0$ se

$$p + p_1 + p_2 \ldots + p_{n-1} = \delta > (m - n + 1) p_r \ldots (d)$$

dove n non $> m$. ed è chiaro che si ha $x = 1$. quando all'eq. (d) coesista $S_1 = 0$.

Nè punto è necessario l'ordine progressivo p, p_1, p_2 ec. poichè quando $x = 1$ la funzione

$$px^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} \ldots + p_f x^{m-f} \text{ec.} + p_g x^{m-g} \text{ec.} + p_h x^{m-h} \text{ec.}$$

coincide con

$$p_f x^m + p_g x^{m-1} + p_h x^{m-2} \text{ec.} + p x^{m-f} \text{ec.} + p_1 x^{m-g} \text{ec.} + p_2 x^{m-h} \text{ec.}$$

Per adattare il teor. sopra esposto all' ipot. che sia $d < 1 = \frac{1}{u}$ si dee cangiare p_m in p, p_{m-1} in p_1 ec. Difatto l'eq. (a) diviene

$$V_m \ldots p_m u^m + p_{m-1} u^{m-1} \ldots + p_1 u + p = 0,$$

e siccome risulta $V_m > 0$ quando

$$p^m \text{ ovv. } p_m u + p_{m-1}, \text{ ovv. } p_m u^2 + p_{m-1} u + p_{m-2}, \text{ ec.} = \delta > \frac{p_r}{u-1}$$

basta supporre $x = h$ (n.° positivo < 1), il che dà $u = \frac{1}{h}$, per ritrarre $V_m > 0$ quando

$$p_m \text{ ovv. } \frac{p_m}{h} + p_{m-1}, \text{ ovv. } \frac{p_m}{h^2} + \frac{p_{m-1}}{h} + p_{m-2} \text{ec.} = \delta > \frac{p_r . h}{1-h},$$

frazione che si trasforma in $\frac{p_r s}{t-s}$ sostituendo $\frac{s}{t}$ per h, dove $t>s$.

§. 510 Se $-p_{r'}$ prossimo $<-p_r$, risulta $D_m>0$ qualora si abbia

$$pd^{m-n}+p_1d^{m-n-1}+p_2d^{m-n-2}\ldots+p_{n-1}=\delta>\frac{p_{r'}}{d-1},$$

purchè niun coefficiente posteriore a p_{m-n} sia $=-p_{r'}$, altrimenti S può risultare negativa e superare la parte positiva della trasformata. Può anche sostituirsi $p_{r''}$ a $p_{r'}$, essendo $-p_{r''}$ prossimo $<p_{r'}$; purchè $-p_r$, $-p_{r'}$ appartengano soltanto ai termini che costituiscono il 1.° membro del noto rapporto, e così in seg.

§. 511 Trovato per mezzo de'criterj (508) un valore $d_1>u$ cioè della massima risolvente reale positiva della V_m (509), siccome $\frac{1}{u}=x$, risulta $\frac{1}{d_1}<x$, purchè, posto $d_1>1$ si verifichino le condizioni $D'_2>0$; $D'_3>0$, $D''_3>0$; ec. (§. cit.)

Si trova per es.° che $3>x$ in

$$x^4+2x^3-5x^2-6x+2=0,$$

perchè $D_1(=pd+p_1)=3+2=5$ e $5>\frac{6}{3-1}\left(=\frac{p_r}{d-1}\right)$; e siccome $d=3$ in $x^4-4x^3+7x^2-7x-6=0$ dà

$$D_1=3-4=-1, D_2(=pd^2+p_1d+p_2)=9-12+7=4>\frac{7}{3-1},$$

$D'_2(=2pd+p_1)=6-4=2$ (>0) si ha come sopra $3>$ della massima risolv. reale positiva.

Per verificare se lo stesso avvenga del valo-

re $d=2$ per rapporto all'eq. prec. istituisco il seg. calcolo:

$D_0(=p)=1$

$D_1(=D_0d+p_1)=2-4=-2$

$D_2(=D_1d+p_2)=-4+7=3\left(<\frac{7}{2\cdot 1}\right)$

$D_3(=D_2d+p_3)=6-7=-1$

$D_4(=D_3d+p_4)=-2-6=-8$ (*)

e ne raccolgo che 2 non supera ec.

Si sperimenti $d=2$ in x^4+2x^3 ec, $=0$ e si avrà

$D_0(=p)=1$

$D_1=2+2=4<\frac{6}{2\cdot 1}$

$D_2=2\,.\,4-5=3<\frac{6}{2\cdot 1}$

$D_3=2\,.\,3-6=0$

$D_4=2\,.\,0+2=2$; quindi

$D'_4(=4pd^3+3p_1d^2+2p_2d+p_3)=30\ (>0)$

$D''_4(=12pd^2+6p_1d+2p_2)=62(>0)$, e però $2>x$.

(*) Per riconoscere l'opportunità di questo prospetto si osservi ch'esso richiede quattro moltiplicazioni ed altrettante addizioni (o sottrazioni) mentre la sostituzione di 2 per x non esigerebbe meno di dieci moltiplicazioni e quattro addizioni.

Così per rapporto a $2x^3-4x^2+7x-3=0$ l' ipot. $d=2/3$

dà
$$D_1=2.2/3-4=-8/3<\frac{p_r s}{t-s}(=12)$$
$$D_2=-8/3.2/3+7=47/9(<12)$$
$$D_3=47/9.2/3-3=13/27(<12);$$
e perchè $D_3>0$, $D'_3(=3pd^2+2p_1d+p_2)=59/9$,
$$D''_3(=6pd+2p_1)=0 \text{ si ritrae } 2/3>x.\text{(*)}$$
§. 512 Per far sì che la Y_m (502) sia priva di un dato termine si suppone eguale a zero il suo coefficiente, e questa eq. dà i valori di d soddisfacenti al quesito. Si toglie per es.° il 2.° termine facendo $mpd+p_1=0$, cioè $d=-\frac{p_1}{mp}$.

Per l' evanescenza del 3.° termine si ha
$$1/2\, m(m-1)d^2+(m-1)p_1d+p_2=0: \text{ ec.}$$
Il rango del termine da eliminarsi, diminuito di un' unità, costituisce il grado dell'eq. in d.

Se il 1.° termine della proposta ha per coefficiente l' unità, e vedremo che può sempre rendersi tale, l' evanescenza del 2.° termine risulta dall' ipot. $x+\frac{p_1}{m}=y$, nè riesce difficile persuadersi di questo fatto analitico.

Sieno β_1, β_2 ec. i valori d' y corrispondenti ai respettivi valori α_1, α_2 ec. d' x, onde abbiasi

(*) Quando i termini della Z_m (503) sono tutti positivi, i reali valori d' y sono negativi e si ha (502) $d>x$.

$$\beta_1 = \alpha_1 + \frac{1}{m} p_1 \,,\ \beta_2 = \alpha_2 + \frac{1}{m} p_1 \,, \ldots \ldots \beta_m = \alpha_m + \frac{1}{m} p_1 \,.$$

Sommando si ottiene

$$\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_m = \alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m + n\left(\frac{1}{m} p_1\right)$$

Ma (496) $p_1 = -(\alpha_1 + \alpha_2 \ldots + \alpha_m)$ e $-(\beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_m)$ è il coefficiente del 2.° termine della trasformata. Dunque ec.

Osserviamo per incidenza, che siccome si eliminano (506) gli n primi termini di un' eq. moltiplicandola n volte di seguito per 0, 1, 2, ec., deesi ottenere lo stesso qualora si moltiplichi una sola volta per 0, 0, 0...(n *vol.*)

$1.2.3.4\ldots n\,;\ 2.3.4\ldots(n+1)\,;\ 3.4.5\ldots(n+2)$, ec.

Per la stessa ragione ove si tratti di eliminare gli ultimi n termini, in vece di moltiplicare n volte una data eq. del grado m per

$m,\ m-1,\ \ldots 0\,;\ m-1,\ m-2,\ \ldots 0\,;\ m-2,\ m-3, \ldots 0$, ec.

basta effettuare la moltiplicazione per

$m(m-1)\ldots[m-(n-1)]\,;(m-1)(m-2)\ldots(m-n)\,;(m-2)(m-3)\ldots[m-(n+1)]$;ec.

* §. 513 L'artifizio analitico con cui si è compendiosamente ottenuta (503) la generale soluzione del Probl. (502) singolarmente favorisce lo sviluppamento di un metodo con cui determinare $\sqrt[m]{N}$ quando m è intiero >3, ed N un n.° composto di molte cifre ed una esatta potenza m.^{esima}

Si è veduto (§. cit.) che profittando della serie direttrice

$p, p_1\mu, p_2\mu^2 \ldots p_m\mu^m$ in vece di $p, p_1, p_2, \ldots p_m$,

l' operazione derivativa, posto d per λ, dà

$$(e)\begin{cases} q_m = pd^m + p_1\mu d^{m-1} + p_2\mu^2 d^{m-2} \ldots + p_{m-1}\mu^{m-1}d + p_m\mu^m. \\ q_{m-1} = mpd^{m-1} + (m-1)p_1\mu d^{m-2} + (m-2)p_2\mu^2 d^{m-3} \ldots, \\ + 2p_{m-2}\mu^{m-2}d + p_{m-1}\mu^{m-1}, \\ q_{m-2} = \frac{m(m-1)}{2}pd^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}p_1\mu d^{m-3} \ldots \\ + 3p_{m-3}\mu^{m-3}d + p_{m-2}\mu^{m-2}, \end{cases}$$

etc. etc.

Dunque se si suppone

$p=1$, $p_1=m$, $p_2=\frac{m(m-1)}{2} \ldots p_{m-2}=\frac{m(m-1)}{2}$,

$p_{m-1}=m$, $p_m=1$, la serie direttrice diviene

$$\mathrm{I} \ldots \left\{ 1, m\mu, \frac{m(m-1)}{2}\mu^2 \ldots \frac{m(m-1)}{2}\mu^{m-2}, m\mu^{m-1}, \mu^m \right\}$$

ed i risultamenti (e) si cangiano in

$$q_m = d^m + m\mu d^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}\mu^2 d^{m-2} \ldots$$
$$+ m\mu^{m-1}d + \mu^m = (d+\mu)^m$$

$$q_{m-1} = m[d^{m-1} + (m-1)\mu d^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\mu^2 d^{m-3} \ldots$$
$$+ (m-1)\mu^{m-2}d + \mu^{m-1}] = m(d+\mu)^{m-1}$$

$$q_{m-2} = \frac{m(m-1)}{2}[d^{m-2} + (m-2)\mu d^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2}\mu^2 d^{m-4} \ldots$$
$$+ (m-2)\mu^{m-3}d + \mu^{m-2}] = \frac{m(m-1)}{2}(d+\mu)^{m-2}$$

etc. etc.

Esaurito lo sviluppamento di $q_m, q_{m-1}, \ldots q_1$, i risultamenti prec. scritti con ordine inverso sono dunque

$$\text{II}\ldots\left\{1, m(d+\mu), \frac{m(m-1)}{2}(d+\mu)^2 \ldots \frac{m(m-1)}{2}(d+\mu)^{m-2}, m(d+\mu)^{m-1}, (d+\mu)^m\right\}.$$

Facciansi adesso nelle formole I, II le seg. ipotesi:

1.° che sia $\mu=0$ e si avrà

$$(e')\ldots\{1, 0, 0, 0, 0, 0, \ldots\ldots$$

$$(e'')\ldots\left\{1, md, \frac{m(m-1)}{2}d^2 \ldots \frac{m(m-1)}{2}d^{m-2}, md^{m-1}, d^m\right\}$$

2.° Se $\mu=10d$ e $d=d'$,

$$(e''')\ldots\left\{1, m.10d, \frac{m(m-1)}{2}10^2.d^2, \ldots\ldots \frac{m(m-1)}{2}10^{m-2}d^{m-2}, m.10^{m-1}d^{m-1}, 10d^m\right\}$$

$$(e^{iv})\ldots\left\{1, m(10d+d'), \frac{m(m-1)}{2}(10d+d')^2 \ldots \frac{m(m-1)}{2}(10.d+d')^{m-2}, m(10d+d')^{m-1}, (10d+d')^m\right\}$$

3.° Se $\mu=10^2d+10d'$ e $d=d''$

$$(e^{v})\ldots\left\{1, m(10^2d+10d'), \frac{m(m-1)}{2}(10^2.d^2+10d')^2 \ldots \frac{m(m-1)}{2}(10^2d^2+10d')^{m-2}, m(10^2d^2+10d')^{m-1}, (10^2d+10d')^m\right\}$$

$(e^{vi})\ldots\left\{1, m(10^2d+10d'+d''), \frac{m(m-1)}{2}(10^2d^2+10d'+d'')^2 \ldots\right.$
$\frac{m(m-1)}{2}(10^2d^2+10d'+d'')^{m-2}, m(10^2d'+10d'+d'')^{m-1},$
$\left.(10^2d^2+10d'+d'')^m\right\}$

4.° Sia $\mu=10^3d+10^2d'+10d'', d=d'''$:

$(e^{vii})\ldots\left\{1, m(10^3d+10^2d'+10d''), \frac{m(m-1)}{2}(10^3d+10^2d'+10d'')^2, \ldots\right.$
$\frac{m(m-1)}{2}(10^3d+10^2d'+10d'')^{m-2}, m(10^3d+10^2d'+10d'')^{m-1},$
$\left.(10^3d+10^2d'+10d'')^m\right\}$

$(e^{viii})\ldots\left\{1, m(10^3d+10^2d'+10d''+d'''),\right.$
$\frac{m(m-1)}{2}(10^3d+10^2d'+10d''+d''')^2, \ldots$
$\frac{m(m-1)}{2}(10^3d+10^2d'+10d''+d''')^{m-2},$
$\left.m(10^3d+10^2d'+10d''+d''')^{m-1}, (10^3d+10^2d'+10d''+d''')^m\right\}$

e così in seguito.

Dunque se con le serie (e'), (e'''), (e^{v}), (e^{vii}) etc. e coi respettivi n.[i] d, d', d'' etc. si eseguisce l'operazione derivativa della pag. 215 respettivamente si ottengono i risultamenti (e''), (e^{iv}), (e^{vi}), (e^{viii}) etc.

Ciò posto, per avere $\sqrt[m]{N}$ si spartisca N nei membri M, M', M'' ec. di m cifre, verso la sinistra, onde, se il n.° de' membri sia n, abbiasi

$$N=10^{(n-1)m}.M+10^{(n-2)m}.M'+10^{(n-3)m}M''\ \text{etc.}$$

Mediante la tavola delle potenze si determini la massima potenza d^m compresa in M, e si formi con $m-1$ zeri la serie

$$(E')\ldots[1,0,0,0,0\ldots M].$$

Con questa e col n.° d che cade fra 0 e 9, si effettui l' operazione derivativa, avvertendo di fare $D_m=M-d^m$, e siccome la serie (E) non differisce dalla (e') che per l' ultimo termine M sostituito a zero, l'operazione derivativa dee produrre nella $(m+2)^{esima}$ colonna verticale, in vece della (e'') la serie

$$(E'')\ldots\left\{1, md, \frac{m(m-1)}{2}d^2\ldots \frac{m(m-1)}{2}d^{m-2}, md^{m-1}, M-d^m\right\}$$

Sostituendo $10d$ per d convien sostituire 10^mM ad M e però $10^m(M-d^m)$ ad $M-d^m$. Aggiunto il 2.° membro M' la serie (e'') si cangia in

$$(E''')\ldots\ldots\left\{1, m10d, \frac{m(m-1)}{2}10^2.d^2, \ldots\right.$$
$$\left.\frac{m(m-1)}{2}10^{m-2}d^{m-2}, m10^{m-1}d^{m-1}, 10^m(M-d^m)+M'\right\}$$

Si divida l' ultimo termine $10^m(M-d^m)+M'$ per il penultimo $m.10^{m-1}d^{m-1}$ e sia d' l'intiero $=$ ò prossimamente $<\frac{10^m(M-d^m)+M'}{m.10^{m-1}d^{m-1}}$, e tale che il prodotto per d' del penultimo termine della 1.ª linea, ottenuto con l' operazione derivativa tra d' e la serie (E''') non sia $>10^m(M-d^m)+M'$.

Trovata la cifra d' si compia l'operazione derivativa sottraendo da $10^m(M-d^m)+M'$ il prodotto per d' del penultimo termine della 1.ª linea. Siccome la serie (E''') non differisce dalla (e''') che per esservi cangiato il termine $10^m d^m$ in $10^m(M-d^m)+M'$, l'operazione sud.ª dà nella colonna $(m+2)^{esima}$ i termini

$$(E^{iv})\ldots\begin{cases}1, m(10d+d'), \frac{m(m-1)}{2}(10d+d')^2, \ldots, \frac{m(m-1)}{2}(10d+d')^{m-2}, \\ m(10d+d')^{m-1}, 10^m M+M'-(10d+d')^m.\end{cases}$$

In questa si ponga $10d$ per d, $10d'$ per d' onde l'ultimo termine divenga

$$10^m[10^m M+M'-(10d+d')^m],$$

ed aggiungendo allo stesso ultimo termine il 3.º membro M' si avrà

$$(E^{v})\ldots\begin{cases}1, m(10^2 d+10d'), \frac{m(m-1)}{2}(10^2 d+10d')^2, \ldots \\ \frac{m(m-1)}{2}(10^2 d+10d')^{m-2}, \\ m(10^2 d+10d')^{m-1}, 10^m[10^m M+M'-(10d+d')^m]+M''.\end{cases}$$

Dividasi l'ultimo termine pel penultimo: si sperimenti il quoziente d'' come si fece per rapporto a d e d': con d' e con la serie (E^{v}) si faccia l'operazione derivativa, e si avrà dalla $(m+1)^{esima}$ colonna

$$(E^{VI})\ldots\begin{cases}1, m(10^2d+10d'+d''), \frac{m(m-1)}{2}(10^2d+10d'+d'')^2, \ldots\ldots \\ \frac{m(m-1)}{2}(10^2d+10d'+d'')^{m-2}, m(10^2d+10d'+d'')^{m-1} \\ 10^{2m}M+10^mM'+M''-(10^2d+10d'+d'')^m.\end{cases}$$

Se esiste il valore esatto di $\sqrt[m]{N}$, proseguendo quanto bisogna si ottengono tutte le cifre d, d', d'' etc. che la compongono, e si giunge ad una $(m+2)^{esima}$ colonna il cui ultimo termine è

$$10^{(n-1)m}M+10^{(n-2)m}M'+10^{(n-3)m}M'' \text{ etc.} -(10^{(n-1)m}d+10^{(n-2)m}d'+10^{(n-3)m}d'' \text{ ec.})=0.$$

Esauriti i membri M, M' etc. se N non è una potenza m.^{esima} si procede alla determinazione delle cifre decimali aggiungendo m zeri per ogni cifra decimale che si desidera. In questi casi però, e specialmente se N non sia un n.° molto composto, suol essere preferibile il metodo logaritmico di cui (137).

Es° 1.° Si dimanda $\sqrt[4]{19987173376}$.

Diviso il n.° in membri di 4 cifre si vede ch'esso equivale a

$$10^{2.4}.199+10^{1.4}.8717+10^{0.4}.3376.$$

Siccome la massima potenza 4.^{a} compresa in 199 è $81=3^4$ si formi in (I) la serie direttrice 3| 1, 0, 0, 0, 199, analoga ad (E') dove 3 sta per d, e la colonna $(m+2)^{esima}$ darà 1, 12, 54, 108, 118, serie analoga ad (E''). Questa si trasformi in quella che corrisponde ad (E''') e si scriva in (II) (pag. 231)

1, 120, 5400, 108000, 1188717.

Si divida l'ultimo termine pel penultimo, e rigettato il quoziente 11 si supponga successivamente $d' = 9$, 8, 7 etc. Il risultato del 1.° sperimento cioè

$$(f)\ldots\begin{cases} 9\,[\,1,120,5400,108000,1188717 \\ \quad 1,\ 129,\ 6561,\ 167049,1503441 \end{cases}$$

essendo 1503441 n.° $>$ 1188717, si passi a supporre $d = 8$, e si deduca

$$(f')\ldots\begin{cases} 8\,[\,1,120,5400,108000,1188717 \\ \quad 1,\ 128,\ 6424,\ 159392,1275136 \end{cases}$$

Anche il n.° 1275136 essendo $>$ 1188717 si faccia $d' = 7$ e si avrà

$$(f'')\ldots\begin{cases} 7\,[\,1,120,5400,108000,1188717 \\ \quad 1,\ 127,\ 6289,\ 152023,1064161 \end{cases}$$

Siccome 1064161 è $<$ 1188717 la cifra 7 è ammissibile e però si dee compiere la derivazione fra 7 e la serie 1, 120, 5400 ec. Ottenuta la serie

1, 148, 8214, 202612, 124556

che corrisponde ad (E''), si formi in (III) la serie

1,1480, 821400, 202612000, 1245563376

analoga ad (E'): si cerchi il quoziente d'' dell' ultimo termine diviso pel penultimo: mettasi

a prova la cifra 6 che ne proviene, e siccome si trova

$$6\times 20759389 6=1245563376,$$

6 spetta alla radice e si ha esattamente $\sqrt[4]{199\,8717\,3376}=376$. Ecco il prospetto di tutta l'operazione.

(I)	(II)
3⌊1,0,0,0 ,199	7⌊1;120,5400,108000,1188717,
1,3,9, 27,118	1, 127, 6289, 152023,124556
1,6, 27,108	1, 134, 7227,202612
1, 9, 54	1, 141, 8214
1, 12	1, 148
1	1

(III)

6⌊1,1480,821400,202612000,1245563376

1, 1486, 830316, 2075938960,000 etc.

Il Ch.mo Geometra *Ruffini* (Soc. Ital. T. XVI) ha ingegnosamente osservato che in vece delle riprove analoghe alle (f), (f'), (f'') etc. si possono sopprimere nella serie direttrice i primi $[(m+1)-(m-2)]$ termini, tagliando in quelli che restano le ultime tre cifre se $m=4$, le ultime quattro se $m=5$ etc.

È questo un artifizio analogo a quello di cui si fece uso [pag. 137] nella estrazione della radice quadrata. Così le derivazioni $[f]$, $[f']$, $[f'']$, si riducono respettivamente a

9[54,1080,11887
    54, 1566, 14094

8[54,1080,11887
    54, 1512, 12096

7 [54, 1080, 11887
    54, 1458, 10206

In pratica si eseguiscono compendiosamente nella maniera che segue:

[F]...
9 [54, 1080, 11887
    54, 1566, 14094
8 [1512, 12096
7 [1458, 10206

Es.° 2.° Si dimanda $\sqrt[5]{29866,06371,45937,54493}$.

La massima potenza 5.ª compresa in 29866 essendo $16807=7^5$, si ponga $d=7$ e si effettui la derivazione

(IV)

7⌊1,0,0, 0, 0 , 29866

1,7,49,343, 2401, 13059

1,14,147, 1372, 12005

1, 21, 294, 3430

1, 28, 490

1, 35

1

Quindi si formi la serie

1, 350, 49000, 3430000, 120050000, 1305906371 :

si divida l'ultimo n.° per il penultimo: si sperimenti il quoziente 9 con una operazione analoga alla [F], cioè

9⌊343, 12005, 13590

343, 15092, 135738.

8⌊ 14749, 117992

e trovata ammissibile la cifra 8 si effettui la derivazione

[V]

8⌊1, 350, 49000, 3430000, 120050000, 1305906371

1, 358, 51864, 3844912, 150809296, 99432003

1, 366, 54792, 4283248, 185075280

1, 374, 57784, 4745520

1, 382, 60840

1, 390

1

Il resto dell'operazione è sotto i n.[i] [III],[IV].

[VI]

5[1,3900,6084000,4745520000,1850752800000,0943200345937

1, 3905, 6103525, 4776037625,1874632988125, 57003540532

1, 3910, 6123075, 4806653000, 1898666253125

1, 3915, 6142650, 4837366250

1, 3920, 6162250

1, 3925

1

[VII]

3[1,39250,616225000,4837366250000,18986662531250000,570035405312544493

1, 39253, 616342759, 483921527827 7 ,19001180177084831,00ec.

La radice è dunque 7853.

§. 514 Probl. Le risolventi della trasformata vogliönsi eguali a kx. Soluz.[ne] Facendo $x = \frac{y}{k}$ la X diviene

$$py^m + kp_1 y^{m-1} + k^2 p_2 y^{m-2} \dots + k^{m-1} p_{m-1} y + k^m p_m = 0 \dots Y'$$

ed equivale all'ordinato prodotto della proposta per $1, k, k^2 \dots k^m$; ma $y = kx$; dunque se si moltiplica un' eq. per $1, k, k^2$ ec. le risolventi della trasformata sono quelle della proposta moltiplicate per k; E quindi:

1.° Per liberare il 1.° termine della trasformata dal coefficiente $p, [>1]$ basta supporre $k = p$ e dividere tutti i termini pel predetto n.°

2.° Quando alcuni coefficienti sono frazioni finite si moltiplicano tutti i termini pel minimo moltiplice de' denominatori, indi si elimina il coefficiente del 1.° termine.

3.° Un' opportuna potenza $[10]^n$ sostituita per k trasforma in intieri i coefficienti decimali. Così $k=1000$ cangia.

$$x^3+5,745x^2+6,7847\ x+9,7428=0$$

in $x^3+5745x^2+6784700x+9742800000=0$

Si riconduce al prec. caso quello in cui qualche coefficiente trovasi affetto da un radicale numerico, estraendo la respettiva radice ed operando come sopra.

Basta l' ipot. $k=\sqrt{a}$ per un'eq. della forma

$$x^m+p_1\sqrt{a}.x^{m-1}+p_2x^{m-2}+p_3\sqrt{a}.x^{m-3}...=0$$

purchè $\sqrt{a}$ esista ne' soli termini di rango pari:

§. 515. Probl. Si dimanda la trasformata d' X, le cui risolventi equivalgano ad $\frac{1}{x}$. Soluz.ne La sostituzione di $\frac{1}{y}$ per x cangia la X in

$$1+p_1y+p_2y^2...+p_{m-1}y^{m-1}+p_my^m=0.$$

Dunque basta fare $x=1$ e moltiplicare per $1, y, y^2... y^m$.

§. 516. Probl. Le risolventi della trasformata debbon essere le differenze fra quelle della proposta. Soluz.ne Deducendo

$\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_1-\alpha_3$, ec.; $\alpha_2-\alpha_1,\ \alpha_2-\alpha_3$, ec.; $\alpha_3-\alpha_1,\ \alpha_3-\alpha_2$, ec.

ciascuna risolvente dà $m-1$ differenze; quindi la trasformata richiesta è del grado $m(m-1)$,

ed attesa la elisione delle risolventi analoghe $\alpha_1-\alpha_2$, $\alpha_2-\alpha_1$; $\alpha_2-\alpha_3$, $\alpha_3-\alpha_2$; ec. vi mancano i termini di sito pari. Posto $m[m-1]=2n$ si può dunque rappresentare la trasformata per

$$y^{2n}-P_1y^{2n-2}+P_2y^{2n-4}-P_3y^{2n-6}\ldots\pm P_n=0\ldots Y$$

e facendo $y^2=z$ si ha

$$z^n-P_1z^{n-1}+P_2z^{n-2}-P_3z^{n-3}\ldots\pm P_n=0\ldots Z$$

Se ci riesca di determinare P_1, P_2, ec. avremo ambedue le trasformate Y, Z, la 1.ª delle quali ha per risolventi le differenze diverse, la 2.ª i quadrati di esse.

$$\text{Pongasi}\left\{\begin{array}{l}[\alpha_1-\alpha_2]^2+[\alpha_1-\alpha_3]^2\text{ ec. }+[\alpha_2-\alpha_3]^2\text{ ec.ec.}=\sigma_1\\ [\alpha_1-\alpha_2]^4+[\alpha_1-\alpha_3]^4\text{ ec. }+[\alpha_2-\alpha_3]^4\text{ ec.ec.}=\sigma_2\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ [\alpha_1-\alpha_2]^{2\mu}+[\alpha_1-\alpha_3]^{2\mu}\text{ec.}+[\alpha_2-\alpha_3]^{2\mu}\text{ec.ec.}=\sigma_\mu\end{array}\right\}\ldots[d]$$

Si avverta che in forza delle formole [c] (499) si ha

$$[x-\alpha_1]^q+[x-\alpha_2]^q+[x-\alpha_3]^q\text{ ec.}+[x-\alpha_m]^q=mx^q-qs_1x^{q-1}$$
$$+\tfrac{1}{2}q[q-1]s_2x^{q-2}\text{ ec.};$$

che attesa l'identità di questa eq. può darsi ad x qualunque valore: che facendo successivamente $x=\alpha_1$, $=\alpha_2$, ec. e sommando si ottiene

$$[x_1-\alpha_2]^q+[\alpha_1-\alpha_3]^q \text{ec.}+[\alpha_2-\alpha_1]^q+[\alpha_2-\alpha_3]^q \text{ec.},+[\alpha_3-\alpha_1]^q \text{ ec.}$$

$$=ms_q-qs_1 s_{q-1}+{}^1\!/\!_2\, q[q-1]s_2.s_{q-2}-\frac{1}{2.3}q[q-1][q-2]s_3.s_{q-3}\text{ec.}$$

che per qualunque valore dispari di q l' uno e l' altro membro svanisce; che facendo $q=2\mu$ si ha

$$2\tau_\mu=ms_{2\mu}-2\mu s_1.s_{2\mu-1}+{}^1\!/\!_2.2\mu[2\mu-1]s_2.s_{2\mu-2}\ldots.$$
$$-\frac{1}{2.3}2\mu[2\mu-1][2\mu-2]s_3.s_{2\mu-3}\text{ ec.}$$

e perchè i termini equidistanti dal medio $s_\mu.s_\mu$ sono gli stessi, si ritrarrà

$$\sigma_\mu=ms_{2\mu}-2\mu s_1.s_{2\mu-1}+{}^1\!/\!_2 2\mu(2\mu-1)s_2.s_{2\mu-2}-\text{ ec.}$$
$$\pm\frac{2\mu[2\mu-1]\ldots[\mu+1]}{2.3\ldots\mu}\frac{[s_\mu]^2}{2}.$$

Siccome la sostituzione d' $x\pm\delta$ in [X] non altera la differenza fra le risolventi d'[Y] può suppor'si eliminato il 2.° termine della propota: da ciò risulta $s_1=0$, sparisce il 2.° termine nella espressione di σ_μ, si ha

$$\sigma_1=ms_2;\ \sigma_2=ms_4+\frac{6}{2}s_2^2;\ \sigma_3=ms_6+15s_2s_4-\frac{20}{2}s_3^2,\text{ ec.}$$

e P_1, P_2, ec. restano determinati mediante l'eq.^{i}

$$\sigma_1=P_1,\ \sigma_2=P_1\sigma_1-2P_2,\ \sigma_3=P_1\sigma_2-P_2\sigma_1+3P_3,\text{ ec.}$$

analoghe alle (c) (499). dalle quali si deduce

$P_1 = \sigma_1$, $P_2 = \frac{1}{2}[P_1\sigma_1 - \sigma_2]$, $P_3 = \frac{1}{3}[P_2\sigma_1 - P_1\sigma_2 + \sigma_3]$,

$P_4 = \frac{1}{4}(P_3 s_1 - P_2 s_2 + P_1 s_3 - s_4)$, ec. ec. vale a dire

$$P_1 = ms_2 \,,\; P_2 = \frac{1}{2}\left[m^2 s_2^2 - ms_4 - \frac{6}{2}\, s_2^2\right] ,$$

$$P_3 = \frac{1}{3}\left[(ms_2^2 - ms_4 - \tfrac{6}{2} s_2^2)\right] ms_2 - ms_2(ms_4 + \tfrac{6}{2} s_2^2)$$
$$+ ms_6 + 15 s_2 s_4 - \tfrac{20}{2} s_3^2 ;$$

ec. ec.

ed altro non resta che sostituire la respettiva espressione di s_1, s_2, ec. Ecco le definitive formole onde si tratta, per l'eq.[i] di 3.° e 4.° grado, nell'ipot. che siasi eliminato il 2.° termine.

Pel 3.° gr. $P_1 = -3.2p_2$; $P_2 = -18p_2^2$; $P_3 = -4p_2^3 - 27p_3^2$.

Pel 4.° gr. $P_1 = -8p_2$; $P_2 = 22p_2^2 + 8p_4$;

$P_3 = -18p_2^3 + 16p_2p_4 + 26p_3^2$;

$P_4 = 17p_2^4 + 24p_2^2p_4 - 7.16p_4^2 + 3.16p_2p_3^2$;

$P_5 = -4p_2^5 - 2.27p_2^2p_3^2 - 8.27p_3^2p_4 + 3.4^3p_2p_4^2 - 2.4^2p_2^3p_4$;

$P_6 = 4^4p_4^3 - 2^3.4^2p^2p_4^2 + 144p_2p_3^2p_4 + 16p_2^4p_4 - 4p_2^3p_3^2 - 27p_3^4$.

Per un'eq. di 5.° grado fa di mestieri appurare l'espressione di 10 coefficienti, e le formole degli ultimi cinque sono estremamente complicate. (Veggasi *De la Résolution des équat. numériq. p.* 122)

Avendosi per es.° $x^5 - 2x - 5 = 0$ è $p_1 = 0$, $p_2 = -2$,

$p_3=5$, $m=3$, $n=\frac{3.2}{2}=3$; $P_1=12$, $P_2=36$,
$P_3=-643$, e la (Z)

è $$z^3-12z^2+36z+643=0.$$

§. 517. Probl. Si dimanda un' eq. le cui risolventi sieno le somme binarie fra quelle di una data eq. X. Soluz.ne Assumasi l' eq. identica

$$(x+\alpha_1)^q+(x+\alpha_2)^q+(x+\alpha_3)^q....+(x+\alpha_m)^q=$$

$$mx^q+qs_1x^{q-1}+{}^1/_2\,q(q-1)s_2x^{q-2}+\frac{1}{2.3}q(q-1)(q-2)s_3x^{q-3}\text{ec.}$$

si ponga successivamente $x=\alpha_1$, α_2 ec. e si faccia la somma , onde avere

$$2^q(\alpha_1^q+\alpha_2^q\text{ec.})+2(\alpha_1+\alpha_2)^q+2(\alpha_1+\alpha_3)^q+2(\alpha_2+\alpha_3)^q\text{ ec.}=$$

$$ms_q+qs_1s_{q-1}+{}^1/_2\,q(q-1)s_2.s_{q-2}+\frac{1}{2.3}q(q-1)(q-2)s_3.s_{q-3}\text{ec.}$$

Questa , scrivendo S_q per $(\alpha_1+\alpha_2)^q+(\alpha_1+\alpha_3)^q$ ec. $+(\alpha_2+\alpha_3)^q$ ec. si cangi in

$$2S_q=(m-2^q)s_q+qs_1.s_{q-1}+{}^1/_2\,q(q-1)s_2.s_{q-2}\text{ ec.}$$

Avvertasi che $s_0=m$; che i termini equidistanti dagli estremi sono eguali , e si vedrà che la prec. equivale ad

$$S_q=(m-2^{q-1})\,s_q+qs_1.s_{q-1}+{}^1/_2\,q(q-1)s_2.s_{q-2}\,.....$$

$$+\begin{cases}\dfrac{q(q-1)...{}^1/_2(q+3)}{2.3...{}^1/_2(q-1)}\,s_{1/2(q-1)}.s_{1/2(q+1)} & \text{(se } q \text{ è disp.)}\\[2ex] \dfrac{q(q-1)...{}^1/_2(q+2)}{2.3...{}^1/_2q}.{}^1/_2.(s_{1/2q})^2 & \text{(se } q \text{ è pari)}\end{cases}$$

Determinate con questa formola le funzioni S_1, S_2 ec. si calcola come nel Probl. prec. il valore di P_1, P_2, ec. coefficienti della trasformata richiesta, la quale è come la Z (516) del grado $\frac{1}{2}m(m-1(=n)$, e riesce in parecchie occasioni assai vantaggiosa.

§. 518. Probl. Le y della trasformata debbono equivalere ad x^n. Soluz.ne Indicando la trasformata per $y^n - Q_1 y^{n-1} + Q_2 y^{n-2}$ ec. $=0$, si calcoli (499 e 500) s_n, $s_{n,n}$, $s_{n,n,n}$, ec. e pongasi

$$Q_1 = s_n,\ Q_2 = \frac{1}{2} s_{n,n},\ Q_3 = \frac{1}{2.3} s_{n,n,n},\ Q_4 = \frac{1}{2.3.4} s_{n,n,n,n}, \text{ec}$$

Se $n=2$ giova fare $x^2=y$ il che riduce la proposta alla forma $M+Nx=0$, dove M, N sono cognite funzioni d'y e costanti. Moltiplicando per x si ha $Mx+Ny=0$; quindi $x=-\frac{Ny}{M}$, e sostituita questa espressione in $M+Nx=0$ si ottiene $M^2-N^2y=0$, trasformata richiesta.

§. 519 Probl. Si dimanda un' eq. tale, che le sue risolventi sieno una data funzione di quelle della proposta. Soluz.ne Sia $f(x)(y)(z) \ldots$, il simbolo delle funzioni il cui valore si cangia permutando fra loro x, y, z ec., come

$$ax^3 - \frac{b}{z^2},\ ax^2 - \frac{b}{z} + y^4, \text{ ec.}$$

Le funzioni che non si alterano per qualunque permutazione s' indichino per $f(x, y, z \ldots)$: tali sono xy, $x^2+y^2+z^2$.

Per rapporto ad una funzione che partecipi dell'una e dell'altra prerogativa si ha un simbolo analogo, cioè $f(x, y)(z)$ se le x, y sole possono permutarsi; si scrive $f(x, y)(u, z)$ quando la permutazione può farsi fra le x, y e fra le u, z; ec.

La proposta essendo la solita X, ed $f(\alpha_1)(\alpha_2)\ldots(\alpha_m)$ la funzione razionale assegnata, si rappresenti la trasformata per

$$y^n + R_1 y^{n-1} \ldots + R_{n-1} y + R_n = 0 \ldots \Omega$$

Qualunque sia il metodo con cui si procede alla formazione della Ω esso debbe ugualmente influire in α_1, α_2 ec. e per ottenere i valori β_1, β_2 ec. d'y fa d'uopo sostituire successivamente α_2, α_3 ec. per α_1 e vicev.; α_1, α_3 ec. per α_2 e vicev.; ec. Se per es.° la X sia di 3.° grado e si voglia la $y =$ al rapporto di due valori d'x, diminuito del 3.°, istituita l'eq.

$y = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \alpha_3$ si dee porre α_2, α_3 per α_1; α_1, α_3 per α_2; α_1, α_2 per α_3 e viceversa; quindi

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - \alpha_3, \; \beta_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_3} - \alpha_2, \; \beta_3 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} - \alpha_3, \\ \beta_4 = \frac{\alpha_2}{\alpha_3} - \alpha_1, \; \beta_5 = \frac{\alpha_3}{\alpha_1} - \alpha_2, \; \beta_6 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2} - \alpha_1. \end{array}\right\} \text{In generale}$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 = f(\alpha_1)(\alpha_2)(\alpha_3)\ldots(\alpha_m); \; \beta_2 = f(\alpha_2)(\alpha_1)(\alpha_3)\ldots(\alpha_m) \\ \beta_3 = f(\alpha_3)(\alpha_2)(\alpha_1)\ldots(\alpha_m); \; \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \ldots(e)$$

e però $n=1.2.3\ldots m(=\mu)$ n.° delle permutazioni fra α_1, α_2 ec.

Se $\beta_2=\beta_1$ le respettive funzioni f, siccome uguali in virtù della propria forma e indipendentemente dal valore d' x, si conservano tali ad onta di qualunque permutazione simile, la y ha tante coppie di valori eguali quante sono le simili permutazioni che possono farsi in f, ed $n=\frac{1}{2}\mu$.

Se $\beta_1=\beta_2=\beta_3$ tutte le altre permutazioni sono eguali a tre per tre ed $n=\frac{1}{2.3}\mu$. In generale se

$$\left.\begin{array}{l} y=f(\alpha_1;\alpha_2)(\alpha_3)(\alpha_4)\ldots(\alpha_m) \\ y=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(\alpha_4)\ldots(\alpha_m) \\ y=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)(\alpha_5)\ldots(\alpha_m) \\ \ldots\ldots\ldots \\ y=f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\ldots\alpha_m) \end{array}\right. \text{ si ha } \left\{\begin{array}{l} n=\frac{1}{2}\mu \\ n=\frac{1}{2.3}\mu \\ n=\frac{1}{1.3.4}\mu \\ \\ n=\frac{1}{2.3\ldots m}\mu=1. \end{array}\right.$$

In $y=f(\alpha_1,\alpha_2)(\alpha_3,\alpha_4)(\alpha_5)\ldots(\alpha_m)$ la f non varia permutando α_1, α_2 ed α_3, α_4; i valori d' y provengono eguali quattro per quattro e risulta $n=\frac{1}{2.2}\mu$.

Così $y=f(\alpha_1,\alpha_2)(\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)(\alpha_6)\ldots(\alpha_m)$ dà $n=\frac{1}{2.6}\mu$

ed $y=f(\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_h)(\alpha_{h+1},\alpha_{h+2},\ldots\alpha_{h+h'})\ldots(\alpha_{h+h'+1}\ldots\ldots\alpha_{h+h'+h''})$ ec.

darebbe $n = \frac{\mu}{(2.3 \ldots h)(2.3 \ldots h_{,})(2.3 \ldots h_{,,}) \text{ ec.}}$; quindi

Teor. Il grado n della trasformata è=ovv. summultiplo di $1 . 2 . 3 \ldots m$. (*)

I coefficienti R_1, R_2 ec. siccome funzioni simmetriche di β_1, β_2 ec. si determinano sostituendo nelle note eq.[i]

$$R_1 = \beta_1 + \beta_2 \ldots + \beta_n \,;\; R_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 \text{ ec.} + \beta_2\beta_3 \text{ ec.} \,;\; \text{ec.}$$

l'espressione di β_1, β_2 ec. in α_1, α_2 ec. tratta dall'eq.[i] (e)

Abbiasi per es.° $x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3 = 0$ e si voglia trasformare in un'altra le cui risolventi sieno della forma $\alpha_1^2 - \alpha_2\alpha_3$.

Siccome $y = f(\alpha_1)(\alpha_2, \alpha_3)$ si ha $n = \frac{1.2.3}{2} = 3$,

$$y^3 + R_1 y^2 + R_2 y + R_3 = 0 \ldots . \Omega$$

$$\beta_1 = \alpha_1^2 - \alpha_2\alpha_3 \,,\; \beta_2 = \alpha_2^2 - \alpha_1\alpha_3 \,,\; \beta_3 = \alpha_3^2 - \alpha_1\alpha_2 \,.$$

$$R_1 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \,,\; R_2 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 \,,\; R_3 = -\beta_1\beta_2\beta_3 .$$

(*) Infatti, supponendo $m = h + h_{,}$ si ha dalla formola del binomio

$$\frac{m(m-1) \ldots [m-(h-1)] h_{,}(h_{,}-1) \ldots 3.2.1}{(1.2.3 \ldots h)(1.2.3 \ldots h_{,})} = \frac{m(m-1) \ldots [m-(h-1)]}{1.2.3 \ldots h} = i .$$

Si passa all'ipot. $m = h + h_{,} + h_{,,}$ sostituendo $h_{,} + h_{,,} (= n_{,})$ ad $h_{,}$ in $h_{,}(h_{,}-1) \ldots 3.2.1$ deducendo come sopra

$$\frac{n_{,}(n_{,}-1) \ldots [n_{,}-(h_{,}-1)] h_{,,}(h_{,,}-1) \ldots 3.2.1}{(1.2.3 \ldots h_{,})(1.2.3 \ldots h_{,,})}$$

e così in seg. Vegga §. 60. pag. 92.

cioè $R_1 = -[\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)]$

$$= -s_2 + p_2 = (499)\ 3p_2 - p_1^2,$$

$$R_2 = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 - [\alpha_1^3(\alpha_2+\alpha_3) + \alpha_2^3(\alpha_1+\alpha_3) + \alpha_3^3(\alpha_1+\alpha_2)]$$

$$+ \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3^2$$

$$= {}^1/_2\ s_{2,2} - s_3 + (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)s_1 = 3p_2^2 - p_1^2 p_2 .$$

$$R_3 = \alpha_1^3\alpha_2^3 + \alpha_1^3\alpha_3^3 + \alpha_2^3\alpha_3^3 - [\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2^4\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3^4]$$

$$= \frac{1}{2.3} s_{3,3,3} - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 s_3 = p_2^3 - p_1^2 p_2 .$$

Se l'eq. $y = f(\alpha_1)(\alpha_2) \ldots$ è irrazionale fa d'uopo liberarla da'radicali, per lo che daremo quanto prima un metodo generale. Sia

$$y^r + T_1 y^{r-1} + T_2 y^{r-2} \ldots + T_r = 0$$

la trasformata: si facciano tutte le permutazioni in T_1, T_2 ec. che sono razionali e simmetriche funzioni di α_1, α_2 ec., ed il prodotto de' risultamenti darà

$$y^{kr} + V_1 y^{kr-1} + V_2 y^{kr-2} \ldots + V_{kr} = 0,$$

dove k dipende dal n.° delle permutazioni, e non si tratterà che di determinare V_1, V_2 ec., razionali funzioni simmetriche di α_1, α_2 ec.

§. 520 Ecco un opportuno schiarimento alla pag. 248.

Se una data funzione $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_m)$, che diremo f, conserva, in virtù della sua forma, il proprio valore dopo una certa permutazione fra' suoi elementi α_1, α_2, ec., lo stesso av-

viene qualora la permutazione stessa si effettui in qualunque siasi trasformata della f, proveniente dalla stessa od altra qualunque siasi permutazione.

Se per es.° $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = f(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_4)$,

anche $f(\alpha_4, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_2) = f(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_4, \alpha_2)$.

I valori che possono ricavarsi dalla f permutando i suoi elementi sono dunque tutti eguali a due per due. Si prova nella stessa guisa che se la f è di sua natura tale, che conservi il suo valore mentre vi si facciano due permutazioni diverse, l'espressioni di f provengono eguali a tre per tre. Così la funzione

$$\sqrt{\alpha_1\alpha_2^2} + \sqrt{\alpha_2\alpha_3^2} + \sqrt{\alpha_3\alpha_1^2} - \alpha_4^3 [= f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)]$$

non varia se vi si fa la permutazione indicata dalla formola $f(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_4)$, giacchè si ottiene

$$\sqrt{\alpha_2\alpha_3^2} + \sqrt{\alpha_3\alpha_1^2} + \sqrt{\alpha_1\alpha_2^2} - \alpha_4^3 = f(\alpha_2, \alpha_3 \alpha_1, \alpha_4)$$
$$(= f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)];$$

e neppur soggiace a variazione se si effettua nella prec. la permutazione stessa, poichè da

$f(\alpha_2, \alpha_3, \alpha_1, \alpha_4)$ ne deriva $f(\alpha_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_4)$,

vale a dire $\sqrt{\alpha_3\alpha_1^2} + \sqrt{\alpha_1\alpha_2^2} + \sqrt{\alpha_2\alpha_3^2} - \alpha_4^3$ come ec.

Suppongasi fatta nella f la respettiva permutazione di

$$\alpha_1 , \alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_4 \text{ in } \alpha_2 , \alpha_4 , \alpha_1 , \alpha_3 ;$$

indi la funzione modificata sottopongasi due volte successive alla solita permutazione espressa con la $f(\alpha_2 , \alpha_3 , \alpha_1 , \alpha_4)$ e si avranno tre altri risultamenti identici fra loro, cioè:

$$f(\alpha_2,\alpha_4,\alpha_1,\alpha_3)=\sqrt{\alpha_2 \alpha_4^2}+\sqrt{\alpha_4\alpha_1^2}+\sqrt{\alpha_1\alpha_2^2}-\alpha_3^2$$

$$f(\alpha_4,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\sqrt{\alpha_4\alpha_1^2}+\sqrt{\alpha_1\alpha_2^2}+\sqrt{\alpha_3\alpha_4^2}-\alpha_3^2$$

$$f(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_3)=\sqrt{\alpha_1\alpha_2^2}+\sqrt{\alpha_2\alpha_4^2}+\sqrt{\alpha_4\alpha_1^2}-\alpha_3^2,$$

e così inseguito. (Veggasi *Lagrange* Berl. 1771 §. 97)

§. 521 La formola esprimente l'incognita di un'eq. X, altro non può essere che una cognita funzione de' coefficienti $p_1 , p_2 , p_3 , \ldots p_m$: ma quelli di una trasformata

$$y^n + P_1 y^{n-1} + P_2 y^{n-2} \ldots + P_n = 0 ,$$

legittimamente dedotta da X, debbon' essere determinate funzioni di p_1 , p_2 ec. p_m, giacchè questa è l'unica maniera possibile di rintracciare P_1, P_2 ec.: dunque (496) P_1, P_2 ec. equivalgono ad altrettante funzioni di $\alpha_1, \alpha_2 , \ldots \alpha_m$; per conseguenza se dalla trasformata risulti $y = F(P_1 , P_2 , P_3 \ldots P_n)$ può dirsi essere altresì $y = F(\alpha_1, \alpha_2 , \alpha_3 , \ldots \alpha_m)$, dove la funzione F è da noi presa nel suo più generico significato.

CAPITOLO III

Teorica di alcune speciali classi d' eq.ⁱ algebriche.

§. 522. Ogni eq. della forma $x^m + p_m = o$ dicesi *binomia*: ella, se $m = 2\mu$, facendo per comodo

$$\sqrt[m]{-p_m} = v \text{ , cioè } p_{2\mu} = -v^{2\mu},$$

è divisibile per $x - v$ e per $x + v$, cioè per $x^2 - v^2$, e dà per quoziente l' eq. assurda

$$x^{2\mu-2} + v^2 x^{2\mu-4} + v^4 x^{2\mu-6} + \text{ec.} + v^{2\mu-2} = o.$$

Dunque l' eq. $x^{2\mu} - v^{2\mu} = o$ ha due sole risolventi reali; non ne ha veruna la $x^{2\mu} + v^{2\mu} = o$.

Qualora si abbia $m = 2\mu + 1$ evvi il divisore $x \mp v$ della respettiva $x^{2\mu+1} \mp v^{2\mu+1} = o$; ma siccome il quoziente somministra l' eq.

$$x^{2\mu} \pm vx^{2\mu-1} + v^2 x^{2\mu-2} \ldots + v^{2\mu-1} x \pm v^{2\mu} = o$$

che moltiplicata per 1, $v^{-1}, v^{-2}, \ldots v^{-2\mu}$, è necessariamente $> o$ e perciò assurda, ne segue

Teor. *Che un' eq. binomia di grado dispari abbia una sola risolvente reale: due s' ella è di grado pari e della forma* $x^{2\mu} - p_m = o$.

§. 523. La formola
$s_n + s_{n-1}p_1 \ldots + s_2 p_{n-2} + s_1 p_{n-1} + np_n = 0$ (499) se si riferisce all'eq. $x^m + p_m = 0$, le cui risolventi sieno $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, a motivo che $p_1 = 0$, $p_2 = 0, \ldots$ $p_n = 0$, (dove $n < m$), dà $s_n = 0$, si ha

Teor. $\alpha_1^n + \alpha_2^n + \alpha_3^n \ldots + \alpha_m^n = 0$ ed $= -mp_m$ se $n = m$.
teor. che si verifica eziandió per rapporto alle quantità $\frac{1}{\alpha_1}, \frac{1}{\alpha_2}, \ldots \frac{1}{\alpha_m}$ quando $p_m = \pm 1$, perchè facendo $x = \frac{1}{y}$, la proposta si cangia in $y^m \pm 1 = 0$, le cui risolventi sono $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$ ec.

§. 524. Essendo $x = \alpha_1$ in $x^m - 1 = 0$, ed α_1 diversa dall'unità, oltre la $\alpha_1^m - 1 = 0$ si ha

$$(\alpha_1^2)^m - 1 = 0, \; (\alpha_1^3)^m - 1 = 0, \ldots (\alpha_1^{m-1})^m - 1 = 0,$$

e però $\alpha_1, \alpha_1^2, \alpha_1^3, \ldots \alpha_1^{m-1}$ sono risolventi della proposta. Dunque *una risolvente diversa dall' unità basta per determinare tutte quelle di un' eq. binomia* $x^m \pm 1 = 0$.

Le ulteriori potenze α_1^m, α_1^{m+1} ec. riproducono le risolventi già ottenute. Infatti
$(\alpha_1^m)^m = (\alpha_1 . \alpha_1^{m-1})^m$; e perchè $(\alpha_1^{m-1})^m = 1$, rimane $(\alpha_1^m)^m = \alpha_1^m$, cioè $\alpha_1^m = \alpha_1$.

§. 525. Diciamo eq.[i] *potenziali* (*) quelle comprese nella formola

$$x^{mn} + p_1 x^{m(n-1)} + p_2 x^{m(n-2)} \ldots + p_{n_1} x^{m(n-n_1)} \ldots + p_{n-1} x^m + p_n = 0 \ldots (a)$$

(*) Rigettiamo la denominazione di *derivative* perchè presenta un' equivoca analogia con quella dell' eq.i *derivate* (496).

dove $m>1$; formola che facendo $x^m=y$ si cangia in

$$y^n+p_1y^{n-1}+p_2y^{n-2}\ldots+p_{n'}y^{n-n'}\ldots+p_{n-1}y+p_n=0.$$

Se $m=2\mu$ ad ogni real valore d'y corrispondono due reali valori $\mp\sqrt[2\mu]{y}$ d'x, e $2n$ è il massimo n.° delle risolventi reali d'(α), tutte uguali a due per due e di segno contrario: il predetto n.° si riduce ad n se $m=2\mu+1$; perciò quando $m>2$ le risolventi non sono tutte reali, e lo stesso avviene allorchè manca alternativamente un n.° di termini >1, nel qual caso si ha $m>3$.

Ogni eq. potenziale binomia $x^{mn}\pm k=0$ dipende dal sistema $x^m=y$, $y^n\pm k=0$.

§. 526. Dicesi *reciproca* un' eq. che conserva la stessa forma quando vi si sostituisce $\frac{1}{x}$ per x. Tal è

$$px^{2m+1}+p_1x^{2m}+p_2x^{2m-1}\ldots+p_2x^2+p_1x+p=0\ldots(a)$$

Il coefficiente del 1.° dee coincidere coll'ultimo termine, quello de' termini equidistanti dagli estremi dev' essere lo stesso:

Se $p=1$ l'eq. (a) ossia

$$x^{2m+1}+1+p_1x(x^{2m-1}+1)+p_2x^2(x^{2m-3}+1)\text{ ec.}=0$$

riesce divisibile per $x+1$ e dà

$$x^{2m}+(p_1-1)x^{2m-1}-(p_1-p_2-1)x^{2m-2}+(p_1-p_2+p_3-1)x^{2m-3}\ldots$$
$$+(p_1-p_2+p_3-1)x^3-(p_1-p_2-1)x^2+(p_1-1)x+1=0,$$

eq. reciproca che indichiamo per

$$x^{2m}+q_1x^{2m-1}+q_2x^{2m-2}\ldots+q_2x^2+q_1x+1=0.$$

Fatta la divisione per x^m si sommino i termini equidistanti dagli estremi onde avere

$$x^m+\frac{1}{x^m}+q_1\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)+q_2\left(x^{m-2}+\frac{1}{x^{m-2}}\right)\text{ ec.}=0.$$

Supponendo $x+\frac{1}{x}=y$ risulta

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=y^2 \text{ ed } x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2: \text{ Così}$$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=y^3-3y;\ x^4+\frac{1}{x^4}=y^4-4y^2+2,$$

$$x^5+\frac{1}{x^5}=y^5-5y^3+5y\text{, ec. ec. ed in generale}$$

$$x^m+\frac{1}{x^m}=y^m-my^{m-2}+\frac{m(m-3)}{2}y^{m-4}-\frac{m(m-4)(m-5)}{2\cdot3}y^{m-6}+$$
$$\frac{m(m-5)(m-6)(m-7)}{2\cdot3\cdot4}y^{m-8}-\text{ec.}$$

Sostituite le prec. espressioni ottiensi un'eq. del grado m in y, ed i $2m$ valori d'x si hanno dall'eq.

$$x+\frac{1}{x}=y \text{ cioè } x^2-yx+1=0.$$

Dunque ogni eq. reciproca, il cui grado $=2m$ ovvero $=2m+1$, può deprimersi al grado m.

Così $x^6+p_1x^5+p_2x^4+p_3x^3+p_2x^2+p_1x+1=0$

dà $y^3+p_1y^2+(p_2-3)y+p_3-2p_1=0.$

La ragione si è che non può essere α_1 risolvente di un'eq. reciproca, senza che tale sia $\frac{1}{\alpha_1}$; perciò ella equivale al prodotto degli m fattori

$$x^2-\left(\alpha_1+\frac{1}{\alpha_1}\right)x+1,\ x^2-\left(\alpha_2+\frac{1}{\alpha_2}\right)x+1,\ \text{ec.},\ x^2-\left(\alpha_m+\frac{1}{\alpha_m}\right)x+1;$$

più il fattore $x+1$ s'ella è del grado $2m+1$. Le incognite così riduconsi agli m coefficienti de' secondi termini e però ec.

Se la proposta sia $x^{2n+1}-1=0$ dividasi per $x-1$ e la risultante

$$x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}\ldots+x^2+x+1=0$$

deprimasi al grado n. Così $x^{11}-1=0$ si riduce ad un'eq. di 5.° grado.

L'eq. $x^{2n}-1=0$ divisa per x^2-1 dà

$$x^{2n-2}+x^{2n-3}+x^{2n-4}\ldots+x^2+x+1=0$$

e questa si deprime al grado $n-1$. Per es.° $x^{10}-1=0$ si fa dipendere da un'eq. di 4.° grado e da due eq.i di 2.°

§. 527. Un'eq. fra due incognite dicesi *omogenea* quando gli esponenti dell'una e dell'altra incognita formano in ciascun termine una somma costante, somma che costituisce il grado dell'eq. Tal è

$$px^n + p_1 x^{n-1} y + p_2 x^{n-2} y^2 \ldots + p_{n-1} x y^{n-1} + p_n y^n = 0 .$$

Facendo $y = zx$ ella si riduce ad

$$x^n (p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} \ldots + p_2 z^2 + p_1 z + p) = 0,$$

e siccom' equivale al prodotto di n fattori della forma $x(az+b)$, ne segue che la proposta sia risolubile in n fattori simili ad $ay+bx$.

§. 528. Se la X ha μ risolventi eguali ad α_n, la Y_m (502) ne ha μ eguali ad $\alpha_n - d$ e perciò $mpd^{m-1} + (m-1)p_1 d^{m-2}$ ec., coefficiente del suo penultimo termine, è moltiplice di $(\alpha_n - d)^{\mu-1}$ ossia di $(d-\alpha_n)^{\mu-1}$: Ma il coefficiente suddetto, se si fa $=0$ e vi si sostituisce x per d, coincide con la derivata d' X; dunque

Teor. *La derivata di un' eq. che abbia μ risolventi eguali ad α_n, ne ha $\mu - 1$ ad esse identiche, e perciò le X, X' sono divisibili per* $(x-\alpha_n)^{\mu-1}$.

Vale lo stesso per rapporto ad un'altra classe di fattori eguali $(x-\alpha_{n_i})^{\mu_i}$ compresa in X, le X, X' ammettono il divisore comune $(x-\alpha_n)^{\mu-1}(x-\alpha_{n_i})^{\mu_i-1}$, e così in seg.

Ciò posto sia D l' anzidetto comune divisore, deducasi $\frac{X}{D} = E$, ed il massimo divisore di D ed E darà $(x-\alpha_n)(x-\alpha_{n_i}) \ldots = 0$; eq. opportuna per determinare α_n, α_{n_i}, ec. perchè il grado a cui ascende vien costituito dal n.° delle classi di risolventi eguali spettanti ad X.

Essa è inoltre dotata come in seg. si vedrà, della singolare prerogativa di avere tutte le risolventi reali e razionali, per lo che ne riesce molto più facile la risoluzione.

Per es.° l'equazione

$$x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9=0....X$$

da $6x^5+20x^4-12x^3-48x^2+22x+12=0....X'$;

quindi $x^3+x^2-5x+3=D, \frac{X}{D}=x^3+3x^2-x-3(=E)$, ed il massimo divisore di D, E, si trova $=x^2+2x-3$: dunque $x^2+2x-3=0$, ossia $(x-1)(x+3)=0$, è l'eq. che determina le risolventi eguali dell'eq. X, e perchè X' contiene una volta $x+3$, due volte $x-1$, si conclude che la proposta comprende i fattori $(x+3)^2, (x-1)^3$, vale a dire che due risolventi della medesima sono eguali a -3, tre uguali a $+1$.

CAPITOLO IV.

Eliminazione delle incognite

§. 529. *Date fra m incognite z, y, x... altrettante eq.^{i}, assegnare tutti i sistemi de' valori assegnabili alle prime per verificare le seconde:* è un probl. che presenta una compiuta e generale idea della eliminazione. Ad esso elegantemente soddisfassi ricavando dalle proposte, *m* eq.^{i} affette, ciascuna, da una sola e diver-

sa incognita, con la condizione che una contenga la sola z e sia immune da qualunque fattore estraneo, l'altre sieno della forma

$$Ty+V=0\,,\ T_1x+V_1=0\,,\ T_2u+V_2=0\,,$$

essendo T, V, cognite e razionali funzioni di z; T_1, V_1, funzioni d'y, z, come sopra; T_2, V_2, d'x, y, z; ec. ec.

L'eq.[i] del prob. sieno per 1.ª ipotesi

$$[ax+a'y=a''\,,\ bx+b'y=b'']\ldots(A)$$

Coi metodi del §. 55, ovvero sottraendo la 1.ª$\times b$ della 2.ª$\times a$, si ottiene

$$(ab'-a'b)y=ab''-a''b:$$

$$\text{quindi}\left\{y=\frac{ab''-a''b}{ab'-a'b}\ \text{ed}\ x=\frac{a''b'-a'b''}{ab'-a'b}\right\}\ldots(A')$$

Trattisi di ricavare x, y, z, dal sistema

$$ax+a'y+a''z=a'''\ldots(1)$$

$$bx+b'y+b''z=b'''\ldots(2)$$

$$cx+c'y+c''z=c'''\ldots(3)$$

Prese le differenze $a(2)-b(1)$, $c(2)-b(3)$, si ha

$$(ab'-a'b)y+(ab''-a''b)z=ab'''-a'''b$$

$$(cb'-c'b)y+(cb''-c''b)z=cb'''-c'''b.$$

Si cangi x in y ed y in z nelle (A), e siccome dal confronto di esse con le precedenti ne proviene

$a=ab'-a'b\,,\ a'=ab''-a''b\,,\ a''=ab'''-a'''b,$

$b=cb'-c'b\,,\ b'=cb''-c''b\,,\ b''=cb'''-c'''b,$ si ritrarrà

$$z\left(=\frac{ab''-a''b}{ab'-a'b}\right)=\frac{(ab'-a'b)(cb'''-c'''b)-(ab'''-a'''b)(cb'-c'b)}{(ab'-a'b)(cb''-c''b)-(ab''-a''b)(cb'-c'b)}$$

formola, che soppressi i termini $\pm ab'b''c$, $\pm ab'b''c$, e fatta la divisione pel fattore estraneo b, si riduce a

$$z=\frac{c'''(ab'-a'b)+b'''(ca'-c'a)+a'''(bc'-b'c)}{c''(ab'-a'b)+b''(ca'-c'a)+a''(bc'-b'c)}(=\mathrm{H})$$

quindi $$y=\frac{c'''(ba''-b''a)+b'''(ac''-a''c)+a'''(b''c-bc'')}{H}$$

$$x=\frac{c'''(a'b''-a''b')+b'''(a''c'-a'c'')+a'''(b'c''-b''c')}{H}.$$

Il denominatore per tre incognite è composto di tre parti: la 1.ª si forma moltiplicando per c''' (coeff. della 3.ª incognita nella 3.ª eq.) il denominatore relativo al caso di due incognite; la 2.ª cangiando nella 1.ª c in b, b in c e mutando i segni; la 3.ª cangiando nella 2.ª b in a, a in b e mutando i segni.

Si ha il numeratore della 3.ª incognita z scrivendo in H, c''', b''', a''' per c'', b'', a''. Da questo si passa al numeratore d'y e d'x, sostituendo nel 1.° caso ai coefficienti d'y, nel 2.° a quelli d'x, i respettivi ultimi termini. La legge di derivazione è analoga per un maggiore n.° di eq.ⁱ di 1.° grado, affette da un egual n.° d'incognite.

Talvolta però è preferibile un adattato artifizio. Sieno

$$px+q(y+z+u+\text{ec.})=r,\ p'y+q'(x+z+u+\text{ec.})=r',$$
$$p''z+q''(x+y+u+\text{ec.})=r'',\ p'''u+q'''(x+y+z+\text{ec.})=r'''.$$

Fatto $x+y+z+u$ ec. $=\pi$ si hanno le trasformate

$$px+q(\pi-x)=r,\ p'y+q'(\pi-y)=r',$$
$$p''z+q''(\pi-z)=r'',\ p'''u+q'''(\pi-u)=r''': \text{ quindi}$$

$$x=\frac{r-q\pi}{p-q},\ y=\frac{r'-q'\pi}{p'-q'},\ z=\frac{r''-q''\pi}{p''-q''},\ u=\frac{r'''-q'''\pi}{p'''-q'''}.$$

L' eq. ipotetica diviene

$$\frac{r-q\pi}{p-q}+\frac{r'-q'\pi}{p'-q'}+\frac{r''-q''\pi}{p''-q''}+\frac{r'''-q'''\pi}{p'''-q'''}=\pi,$$

e non resta che trarne π e sostituirne il valore nell' espressione d' x, y, z, u.

Es.° 2.° Abbiansi l' eq.i $a=z^3$, $x=u^2$, $y=z-u$, e si voglia ricavarne un' eq. in x, y.

Dalla 3.ª $z=y+u$: la 1.ª si cangia in $a=y^3+3y^2u+3yu^2+u^3$, e posto x per u^2 si riduce ad $a=y^3+3yx+(3y^2+x)u$:
quindi $u=\frac{a-y^3-3yx}{3y^2+x}$, e sostituita questa espressione in $x=u^2$ si ha l' eq. richiesta

$$x=\left(\frac{a-y^3-3yx}{3y^2+x}\right)^2.$$

Quali sono i valori d' x, y, z, che soddisfanno al sistema

$3x-9y+8z=46$, $5x-4y-2z=40$, $11x-7y-6z=36$?

§. 530 La eliminazione si rende difficile a misura che cresce il grado dell' eq.^{i} : Sette metodi, tutti molto eleganti ed ingegnosi sono stati immaginati per tale oggetto, ma i due più semplici divengono soverchiamente laboriosi ove trattisi di due eq.^{i} di 3.° grado; gli altri sono quasi impraticabili anche per queste, e non interessano la curiosità del geometra che per la loro eleganza.

I Met. di *Bezout* (*) Sia proposto il sistema

$$[py^2+qy=r\,,\ p'y^2+q'y=r']\ldots\text{I}$$

dove tutti i coefficienti, o uno almeno sia della 1.^{a} o della 2.^{a}, si suppone cognita funzione d' x.

Tolta la 1.^{a} $\times p'$ dalla 2.^{a} $\times p$ risulta

$$(pq'-p'q)y=pr'-p'r\ldots(\text{B}):$$

Tolgasi la stessa eq. 1.^{a} $\times(p'y+q')$ dalla 2.^{a} $\times(py+q)$, onde si abbia

$$(pr'-p'r)y=rq'-r'q\ldots(\text{C})$$

Tra (B), (C) si elimini y e l' eq. richiesta sarà

$$(pq'-p'q)(rq'-r'q)-(pr'-p'r)^2=0\ldots(\text{D})$$

Se il grado di una delle proposte sia $=m$, dell' altra $=m-n$ si riduce la 1.^{a} al grado del-

(*) Acad. des Sc. de Paris 1764.

la 2.ª col seg. artifizio. Il sistema proposto essendo

$$y^m+py^{m-1}\ldots+v=0\ ,\ y^{m-n}+p'y^{m-n-1}\ldots\ldots+v'=0\ ,$$

dalla 2.ª moltiplicata per y^n si ritragga

$$y^m=-(p'y^{m-1}\ldots+v'y^n\ ):\ \text{quindi}$$
$$y^{m-1}=-(p'y^{m-2}\ldots+vy'^{n-1})$$
$$y^{m-2}=-(p'y^{m-3}\ldots+v'y^{n-2})$$
$$y^{m-3}=-(p'y^{m-4}\ldots+v'y^{n-3})$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$z^{m-n-1}=-(p'y^{m-n}\ldots+v'y\ )$$

Si pongano le prec. espressioni in quella d'y^m: nella espressione di y^{m-1} quelle di y^{m-2}, y^{m-3},...$y^{m-(n-1)}$, e così in seg., ed effettuate tutte le sostituzioni si avrà ec.

Es.° Sia $y^3+3xy^2+3x^2y-98=0$ ed $y^2+4xy-2x^2-10=0$:

Dalla 2.ª$\times y$, si ha $y^3=-4xy^2+2x^2y+10y$:

questa espressione si ponga nella 1.ª e si tratterà di eliminare y fra

$$xy^2-(5x^2+10)y+98=0\ ,\ y^2+4xy-2x^2-10=0.$$

§. 531 Passando all' eq.ⁱ di 3° grado abbiasi

$$[py^3+qy^2+ry=s\ ,\ p'y^3+q'y^2+r'y=s']\ldots\text{II}$$

ed almeno un coefficiente o l'ultimo termine di un' eq. sia nota funzione d' x.

Si moltiplichi la 1.ª per p', per $p'y+q'$, per $p'y^2+q'y+r'$: i prodotti si tolgano respettivamente dalla 2.ª moltiplicata per p, per $py+q$, per py^2+qy+r, onde avere

$$(pq'-p'q)y^2+(pr'-p'r)y+p's-ps'=0,$$

$$(pr'-p'r)y^2+(p's-ps'+qr'-q'r)y+q's-qs'=0,$$

$$(p's-ps')y^2+(q's-qs')y+r's-rs'=0;$$

eq.[i] che facendo $pq'-p'q=A$, $pr'-p'r=B$, $p's-ps'=C$, $qr'-q'r=D$, $q's-qs'=E$, $r's-rs'=F$, si riducono ad

$$\left.\begin{array}{l} Ay^2+By+C=0 \\ By^2+(C+D)y+E=0 \\ Cy^2+Ey+F=0. \end{array}\right\} \ldots (E)$$

Dalla 1.ª $y=-\frac{By+C}{A}$. Le altre divengono

$$B(By+C)-A(C+D)y-AE=0,\ C(By+C)-AEy-AF=0:$$

La 2.ª dà $y=\frac{AF-C^2}{BC-AE}$; la 1.ª si riduce ad

$$(AF-C^2)(B^2-AC-AD)+(BC-AE)^2=0.$$

Tolto B^2C^2 e fatta la divisione per A resta

$$C^3+C^2D-C(AF+2BE)+AE^2+F(B^2-AD)=0\ldots(F)$$

e restituito il valore di A, B, C etc.

$$\left.\begin{array}{l} (p's-ps')^3+(p's-ps')^2(qr'-q'r)-(p's-ps')[(pq'-p'q)(rs'-rs') \\ +2(pr'-p'r)(q's-qs')]+(pq'-p'q)(q's-qs')^2+ \\ (rs'-r's)[(pr'-p'r)^2-(pq'-p'q)(qr'-q'r)] \end{array}\right\}=0\ldots(G)$$

Es.° Se $y^3-ay+x(x^2-a)=0$, $3xy^2+3x^2y-b=0$ si faccia in (G) $p=1$, $q=0$, $r=-a$; $s=-x(x^2-a)$; $p'=0$, $q'=3x$, $r'=3x^2$, $s'=b$, e si avrà

$$27x^6-36ax^4+9a^2x^2-6abx+b^2=0 \quad (*)$$

* §. 532 II Met. *Newtoniano* (Arith. Univ.) Sieno l'eq.[i]

$$py^m+qy^{m-1}+ry^{m-2}\ldots+v=0\,,\; p'y^m+q'y^{m-1}+r'y^{m-2}\ldots+v'=0$$

essendo p, q etc. p', q' etc. come nel met. prec.

Moltiplicando la 1.ª per p' e la 2.ª per p divengono identici i primi termini, e la differenza fra il 2.° ed il 1.° prodotto è

$$(pq'-p'q)y^{m-1}+(pr'-p'r)y^{m-2}\ldots+pv'-p'v=0.$$

Si rendano identici gli ultimi termini con moltiplicare la 1.ª per v', la 2.ª per v, e la solita differenza, fatta la divisione per y, darà

$$(p'v-pv')y^{m-1}+(q'v-qv')y^{m-2}\ldots+u'v-uv'=0.$$

Si operi sulle due prec. eq.[i] come sulle proposte e si otterranno due eq.[i] del grado $m-2$. Proseguendo si giunge a due eq.[i] di 1.° grado in y da cui facilmente ricavasi l'eq. in x.

Tale fu supposto dall'*Eulero* (Acc. di Berl. 1764) il metodo con cui *Newton* trovò le formole da lui esposte nell' Arith. Univ. Infatti applicandolo all' eq.[i] (A) del §. 529 si ottengono le formole (A'): facendone prova sui sistemi I, II, (530 e 31) si ritrovano l'eq.[i] finali respettive.

(*) Moltiplicando la 2.ª eq. per y onde ridurla al grado della 1.ª ottiensi un' eq. finale di 9.° grado, affetta dai fattori estranei x, x^2-a.

$$(D), C(F)\} = (p's - ps')(G)\}; \text{ (§§. cit.)};$$

e qualora si abbia il sistema

$$\{py^4 + qy^3 + ry^2 + sy + t = 0, p'y^4 + q'y^3 + r'y^2 + s'y + t' = 0\} \ldots \text{III}$$

supponendo per brevità

$pq' - p'q = A$, $st' - s't = B$, $p't - pt' = C$, $pr' - p'r = D$, $r't - rt' = E$, $q't - qt' = F$, $ps' - p's = G$, si giunge all' eq. finale

$$(AB-C^2)^3 + (AB-C^2)^2 DE - (AB-C^2)(AF-CD)(BG+CE) - 2(AE-CG)[(CF+BD)+(AF-CD)(CF+BD)^2] + (BG+CE)[(AE+CG)^2 - (AF-CD)(DE-FG)] = 0.$$

Tali appunto sono le formole Newtoniane, e le ultime due non si ottengono con alcuno de' metodi sin qui scoperti.

* §. 533 III Met. *Euleriano* (Acc. di Berl. 1764). Sieno l' eq.^{i}

$$y^m + py^{m-1} + qy^{m-2} \ldots + v = 0, y^n + p'y^{n-1} + q'y^{n-2} \ldots + v' = 0] \ldots (H)$$

Dovendosi queste verificare insieme per uno stesso valore d'y, che sia per es.° y_1, si ha necessariamente

$$y^m + py^{m-1} \text{ etc.} = (y^{m-1} + P y^{m-2} \ldots + V)(y - y_1)$$

$$y^n + p'y^{n-1} \text{ etc.} = (y^{n-1} + P'y^{n-2} \ldots + V')(y - y_1).$$

Quindi

$$(y^m + py^{m-1} \text{ec.})(y^{n-1} + P'y^{n-2} \text{ec.}) = (y^n + p'y^{n-1} \text{ec.})(y^{m-1} + Py^{m-2} \text{ec.})$$

Fatto il confronto de' termini simili si ottengono $(m+n)-1$ eq.^{i} di 1.^{o} grado fra $(m+n)-2$ elementi ignoti, che sono $P, Q \ldots V; P', Q' \ldots V'$. Si effettui la eliminazione di questi, e rimarrà un'eq. fra i soli coefficienti $p, q \ldots v; p', q' \ldots v'$, la quale, siccome coesistente con la condizione che $y-y_1$ sia comune fattore dell'eq.^{i} date, è l'eq. eliminata.

Questo metodo preferito da *Lacroix* (Traité de Calc. Diff. et. Int. T. I §. 192) ha il doppio difetto di esigere un calcolo molto laborioso, e di condurre a dei risultamenti affetti da fattori estranei, più complicati di quelli del Met. Newtoniano, a cui per inavvertenza si volle dal Geometra Svizzero male a proposito sostituire. (*)

* §. 534 IV Met. *Euleriano* (Accad. di Berl. 1748) Sieno l'eq.^{i}

$$y^m + p_1 y^{m-1} + p_2 y^{m-2} \ldots + p_m = 0 \ldots \text{IV}$$

$$y^n + \omega_1 y^{n-1} + \omega_2 y^{n-2} \ldots + \omega_n = 0 \ldots \text{V}$$

La loro coesistenza richiede che ogni valore d'y soddisfacente alla 1.^{a}, che indichiamo per

$$(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)\ldots(y-a_m)=0 \quad (4)$$

n'eguagli uno della 2.^{a}, ossia d'

$$(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)(y-\alpha_3)\ldots(y-\alpha_n)=0\ldots(5)$$

(*) Può vedersi un' accurata discussione di questo Met. in una Mem.^{a} del dottissimo Geometra *Cossali* (Soc. Ital. T. XVI. p. 289, e seg.)

Ma verificandosi una delle ipotesi

$$a_1 = \alpha_1\,,\ = \alpha_2\,,\ = \alpha_3\,, \ldots = \alpha_n\,,$$

$y = a_1$ soddisfa ad ambedue le proposte, e lo stesso avviene d'$y = a_2$ se $a_2 = \alpha_1$, ovv. $= \alpha_2$, ec. lo stesso d'$y = a_3$ se $a_3 = \alpha_1$, ovv. $= \alpha_2$, ec. ec.

Dunque l'eq. finale in x, perchè dee comprendere tutti i casi possibili, e soddisfare a ciascuna delle indicate combinazioni, vien somministrata dall'eq. (5) sotto la forma

$$(\mathrm{J})\left\{\begin{array}{l}[(a_1-\alpha_1)(a_1-\alpha_2)\ldots(a_1-\alpha_n)][(a_2-\alpha_1)(a_2-\alpha_2)\ldots(a_2-\alpha_n)]\times \\ [(a_3-\alpha_1)(a_3-\alpha_2)\ldots(a_3-\alpha_n)][(a_4-\alpha_1)(a_4-\alpha_2)\ldots(a_4-\alpha_n)]\times \\ \ldots\ldots\ldots\ldots [(a_m-\alpha_1)(a_m-\alpha_2)\ldots(a_m-\alpha_n)]=0\end{array}\right.$$

e perciò ad

$$(\mathrm{L})\left\{\begin{array}{l}(a_1^n+\omega_1 a_1^{n-1}+\omega_2 a_1^{n-2}\ldots+\omega_n)(a_2^n+\omega_1 a_2^{n-1}+\omega_2 a_2^{n-2}\ldots+\omega_n)\times \\ (a_3^n+\omega_1 a_3^{n-1}+\omega_2 a_3^{n-2}\ldots+\omega_n)(a_4^n+\omega_1 a_4^{n-1}+\omega_2 a_4^{n-2}\ldots+\omega_n)\times \\ \ldots\ldots\ldots (a_m^n+\omega_1 a_m^{n-1}+\omega_2 a_m^{n-2}\ldots+\omega_n)\end{array}\right\}=0$$

Si ha una formola simile ed eguale alla prec. sostituendo successivamente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ per y nell eq. (4) e facendo il prodotto

$$(\mathrm{M})\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1^m+p_1\alpha_1^{m-1}+p_2\alpha_1^{m-2}\ldots+p_m)(\alpha_2^m+p_1\alpha_2^{m-1}+p_2\alpha_2^{m-2}\ldots+p_m)\times \\ (\alpha_3^m+p_1\alpha_3^{m-1}+p_2\alpha_3^{m-2}\ldots+p_m)(\alpha_4^m+p_1\alpha_4^{m-1}+p_2\alpha_4^{m-2}\ldots+p_m)\times \\ \ldots\ldots\ldots (\alpha_n^m+p_1\alpha_n^{m-1}+p_2\alpha_n^{m-2}\ldots+p_m)\end{array}\right\}=0,$$

prodotto la cui identità con (L) si scuopre osservando ch'esso non differisce da

$$[(\alpha_1-a_1)(\alpha_1-a_2)(\alpha_1-a_3)\ldots(\alpha_1-a_m)][(\alpha_2-a_1)(\alpha_2-a_2)\ldots(\alpha_2-a_m)]\times$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots [(\alpha_n-a_1)(\alpha_n-a_2)\ldots(\alpha_n-a_m)]$$

e che le funzioni comprese nelle respettive sgraffe coincidono con le colonne 1.ª, 2.ª, 3.ª ec. della formola (J) purchè si scrivano l'una sopra l'altra tutte le funzioni comprese in ciascuna coppia di sgraffe.

Veduto il prospetto delle operazioni che costituiscono l'eq. finale fa d'uopo rintracciarne la forma definitiva, per lo che a ciascuna funzione simmetrica delle ignote risolventi a_1, a_2 ec. se si adopera la (L), e delle ignote α_1, α_2 ec. se si fa uso della (M), si dee sostituire la sua espressione per ω_1, ω_2 ec. in (M), per p_1, p_2 ec. in (L): calcolo relativo al §. 498 e sempre eseguibile, ma molesto assai ed imbarazzante anche quando la y non oltrepassa il 3.º grado nelle proposte.

Sieno $y^2+p_1y+p_2=0$, $y^2+\omega_1y+\omega_2=0$.

La formola (L) si riduce ad

$$(a_1^2+\omega_1a_1+\omega_2)(a_2^2+\omega_1a_2+\omega_2)=0, \text{ ossia}$$

$$a_1^2a_2^2+\omega_1a_1a_2(a_1+a_2)+\omega_2(a_1^2+a_2^2)+\omega_1^2a_1a_2+\omega_1\omega_2(a_1+a_2)$$
$$+\omega_1\omega_2(a_1+a_2)+\omega_2^2=0;$$

e perchè $a_1+a_2=-p_1$, $a_1a_2=p_2$, $a_1^2+a_2^2=p_1^2-2p_2$, equivale a

$$p_2^2+(\omega_1^2-p_1\omega_1)p_2+\omega_2(p_1^2-2p_2+p_1\omega_1)+\omega_2^2=0,$$

eq. che facendo (530) $p=1$, $q=p_1$, $r=-p_2$;

$p'=1$, $q'=\omega_1$, $r'=-\omega_2$ coincide con quella del cit. §.

Se $y^3+p_1y^2+p_2y+p_3=0$, $y^3+\omega_1y^2+\omega_2y+\omega_3=0$, si ha la (L) sotto la forma

$$[a_1^3+\omega_1a_1^2+\omega_2a_1+\omega_3][a_2^3+\omega_1a_2^2+\omega_2a_2+\omega_3][a_3^3+\omega_1a_3^2+\omega_2a_3+\omega_3]=0$$

e mediante la sostituzione di

$$1, p_1, p_2, p_3 \text{ per } p, q, r, s;\ 1, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \text{ per } p', q', r', s',$$

nelle formole spettanti all' eq.[i] cubiche [531] riproduce l' eq. [G] [§. cit.]

Questo metodo, quantunque fondato sulla vera metafisica della eliminazione, ha il disavvantaggio di condurre per una via molto più difficile e laboriosa ai medesimi risultamenti del Met. *Bezoutiano*, il quale altro in sostanza non è che un artifizio analitico. Un semplice artifizio è dunque talvolta preferibile ai metodi più profondamente immaginati.

§. 535 V Met. di *Lagrange* [De la Résol. des éq. numér. p. 127].

La 2.ª eq. del grado n ($=$ò$<m$, massimo esponente della 1.ª) si moltiplichi per

$$x^{m-1}+\pi_1x^{m-2}+\pi_2x^{m-3}\ldots+\pi_{m-1}x+\pi_m;$$

Dalla risultante del grado $m+n-1$ si eliminino, mediante la 1.ª dell' eq.[i] date, le potenze

$$x^{m+n-1},\ x^{m+n-2},\ \ldots\ x;$$

i coefficienti che nell' eq. residuale trovansi af-

fetti da x^{m-1}, x^{m-2}, ... x, facciasi eguali a zero: da tali eq.[i], tutte di 1.° grado, traggasi π_1, π_2, ... π_{m-1}, e sostituendone il valore nell' ultimo termine della risultante di cui sopra, si avrà l'eq. richiesta.

* §. 536 VI. Met. di *Lagrange*. Posto $\frac{1}{y}$ per y nell'eq. IV del §. 534 e divisa per y^n l'eq. V, si ha

$$1+p_1y+p_2y^2\ldots+p_my^m=0\;\ldots\text{VI}$$

$$1+\frac{\omega_1}{y}+\frac{\omega_2}{y^2}\ldots+\frac{\omega_n}{y^n}=0\;\ldots\text{VII}$$

Ma $1+p_1y+p_2y^2\ldots+p_my^m=[1-a_1y][1-a_2y]\ldots[1-a_my]$,

$$\log.[1+p_1y+p_2y^2\ldots+p_my^m]=-\left\{\begin{array}{l} y\,[a_1+a_2\ldots+a_m]+\\ \tfrac{1}{2}y^2[a_1^2+a_2^2\ldots+a_m^2]+\\ \tfrac{1}{3}y^3[a_1^3+a_2^3\ldots+a_m^3]+\\ \text{ec.}\quad\text{ec.}\end{array}\right.$$

$$\log.[(1+p_1\alpha_1+p_2\alpha_1^2\ldots+p_m\alpha_1^m)(1+p_1\alpha_2+p_2\alpha_2^2\ldots+p_m\alpha_2^m)\times\ldots$$
$$\ldots(1+p_1\alpha_n+p_2\alpha_n^2\ldots+p_m\alpha_n^m)][=\log.(M_1)]=-$$
$$\left\{\begin{array}{l}(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\ldots+\alpha_n)(a_1+a_2+a_3\ldots+a_m)+\\ \tfrac{1}{2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\ldots+\alpha_n^2)(a_1^2+a_2^2+a_3^2\ldots+a_m^2)+\\ \tfrac{1}{3}(\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3\ldots+\alpha_n^3)(a_1^3+a_2^3+a_3^3\ldots+a_m^3)\ \text{ec.}\end{array}\right\}=(499)$$
$$-[p_1\omega_1+\tfrac{1}{2}(\omega_1^2-2\omega_2)(p_1^2-2p_2)+\tfrac{1}{3}(\omega_1^3-6\omega_1\omega_2+3\omega_3)(p_1^3-3p_1p_2+3p_3)\text{ec.}]$$

Questa espressione di log.(M_1) si rappresenti per $-\varphi$ e si avrà $(M_1)(=e^{-\varphi})=1-\varphi+\tfrac{1}{2}\varphi^2-\frac{1}{2.3}\varphi^3\ldots(N)$

dove il 2.° membro è limitato, perchè, attesa la natura delle formole (L), (M) (dalla 2.ª delle quali la (M_1) non differisce che per la sostituzione di $\frac{1}{\alpha_1}$, $\frac{1}{\alpha_2}$ ec. in luogo di α_1, α_2 ec.), i termini ond'è composto non possono contenere alcun prodotto di $p_1, p_2; \ldots p_m$, di una dimensione $> n$; nè alcun prodotto di $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, la cui dimensione sia $> m$. Infatti, nello sviluppamento di (L), oltre i prodotti del grado massimo m di ω_1, ω_2 ec. non si hanno che delle funzioni simmetriche di a_1, a_2 ec. le quali si esprimono per p_1, p_2 ec. Con eguale facilità si vede che nello sviluppamento di (M), oltre i prodotti del massimo grado n, di p_1, p_2, ec. non vi sono che funzioni simmetriche di α_1, α_2 ec. esprimibili per ω_1, ω_2 ec. Ma i due sviluppamenti sono identici: dunque ec.

Sieno date per es.° l'eq.ⁱ

$$1 + p_1 y + p_2 y^2 = 0\ ,\ 1 + \frac{\omega_1}{y} + \frac{\omega_2}{y^2} = 0\ .$$

Subito si scuopre che si ha

$$\varphi = p_1\omega_1 + (\omega_2 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2)(2p_2 - p_1^2) + 3p_1p_2\omega_1\omega_2 + (p_2\omega_2)^2$$

$$\varphi^2 = (p_1\omega_1)^2 + 4p_1p_2\omega_1\omega_2 + 4(p_2\omega_2)^2\ ,\ \varphi^3 = 0\ ,\ \varphi^4 = 0\ ,\ \text{ec.}$$

e che l'eq. finale è

$$1 - p_1\omega_1 - 2p_2\omega_2 + p_1^2\omega_2 + \omega_1^2 p_2 + p_2^2\omega_2^2 - p_1p_2\omega_1\omega_2 = 0\ ,$$

cioè $$(p_2\omega_1 - p_1)(p_1\omega_2 - \omega_1) - (1 - p_2\omega_2)^2 = 0\ ,$$

eq. che derivasi dalla formola

$$(pq'-p'q)(rq'-r'q)-(pr'-p'r)^2=0 \quad (530)$$

purchè vi si sostituisca $p_2, p_1, -1$ per p, q, r; ed $1, \omega_1, \omega_2, -\omega_3$ per p', q', r'.

Se l'eq.[i] sieno cubiche le formole VI, VII divengono

$$1+p_1y+p_2y^2+p_3y^3=0\,,\; 1+\frac{\omega_1}{y}+\frac{\omega_2}{y^2}+\frac{\omega_3}{y^3}=0:$$

con un calcolo molto laborioso si trova la formola (N) composta di 104 termini riduttibili a 34, e che dopo le riduzioni, sostituendo p, q, r, s per $p_3, p_2, p_1, -1$; p', q', r', s' per $1, \omega_1, \omega_2, -\omega_3$, riproduce la (G) del §. 531 Essa è dunque uno sterile ornamento della scienza algebrica.

* §. 537 VI Met. di *D'Alembert*. (Enciclop. Art. *Evanouir*) Trattandosi di risolvere l'eq.[i] (H)(533) suppongasi $m>n$. Se fosse $m=n$ si trarrebbe y^m dall'una e dall'altra, e si assumerebbe l'eq. del grado $m-1$, proveniente dalle due espressioni d'y^m, unitamente ad una delle proposte. Sieno (α), (β) la 1.[a] e la 2.[a] delle (H); s'indichino per q, q_1, q_2 ec. i successivi quozienti, per r, r_1, r_2, ec. i corrispondenti residui, dedotti (51) da $(\alpha):(\beta)$ e sieno $\mu, \mu_1; \mu_2$ ec. i respettivi coefficienti (cognite funzioni d'x) della massima potenza d'y in r, r_1, r_2 ec. L'applicazione del cit. metodo dà il sistema

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha)=(\beta)q+r\,,\; \mu(\beta)=rq_1+r_1\\ \mu_1 r=r_1q_2+r_2\,,\; \ldots\ldots\\ \mu_{n-1}r_{n-2}=r_{n-1}q_n+r_n\,;\end{array}\right\}\ldots(O)$$

e da esso apparisce che due valori $x=x_,$, $y=y_,$, i quali verifichino $[(\alpha)=0\,,(\beta)=0]$ debbono verificare la $r=0$; che (β), r non possono andare a zero senza che ciò succeda di r_1 e così fino ad r_n, residuo indipendente da x. Deriva dunque dalla natura del sistema (O) che due valori $x_,$, $y_,$, non possono soddisfare ad $(\alpha)=0$, $(\beta)=0$, senza che facciano lo stesso per rapporto ad $r_{n-1}=0$, $r_n=0$; perciò le soluzioni del probl. sono tutte comprese fra quelle delle due prec. eq.[i] ; la 2.[a] determina i valori d' x: sostituiti questi nella 1.[a], ch' è della forma $My+N=0$, si hanno i corrispondenti valori d' y. Trattisi per es.[o] di risolvere un probl. dipendente dalle due seg. eq.[i]

$$'py^2+'qy^2+'ry-'s=0\,,\; p'y^2+q'y-r'=0\,.$$

Divisa la 1.[a] per la 2.[a] si ha

$$r=\left\{'r+\frac{'pr'}{p'}-\frac{q'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)\right\}y-'s+\frac{r'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)=0,$$

e la divisione della 2.[a] per r da l' eq. finale in x,

$$r_1=r'+\frac{q'\left[-'s+\frac{r'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)\right]}{'r+\frac{'pr'}{p'}-\frac{q'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)}-\frac{p'\left[-'s+\frac{r'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)\right]^2}{\left['r+\frac{'pr'}{p'}-\frac{q'}{p'}\left('q-\frac{'pq'}{p'}\right)\right]^2}=0.$$

Lo stesso metodo applicato a due eq.[i] cubiche in x, y (531) dà

$$\frac{p}{p\,q-pq'}(G)=0$$ dove (G) è l' eq. in x del §. cit.

Se l'operazione finisce con r_1 l'eq.^{i} $r=0, r_1=0$ possono coesistere con $(\beta)=0$ e con $\mu=0$; perciò l'eq. finale comprende anche le risolventi di $\mu=0$. L'ultimo residuo essendo r_2 l'eq.^{i} $r_1=0, r_2=0$ possono coesistere con $\mu_1=0$; e siccome ad $r=0, r_1=0$ può corrispondere $\mu=0$, l'eq. finale trovasi affetta dalle risolventi di $\mu=0$; $\mu_1=0$; ec. Dunque l'eq. finale $r_n=0$ è modificata da fattori estranei, e per deprimerla al grado che le conviene fa d'uopo dividerla per $\mu . \mu_1 . \mu_2 . \ldots . \mu_{n-1}$.

Quando anche r_1 può dividersi per r la 3.^{a} delle [O] è della forma $\mu r_1 = r q_2 + r_2$ e si ha μ^2 in vece di $\mu \mu_1$: si avrebbe μ^3 in vece di $\mu . \mu_1 . \mu_2$ se si potesse adoperare lo stesso divisore r per tre divisioni consecutive ec. Si sostituisce μ_1^2 a $\mu_1 . \mu_2$ quando r_1 è due volte divisore, ec. ec. Potendosi fare doppia divisione per r si moltiplica $[\beta]$ per μ^2 e si divide pel 1.° termine di r la somma de' due primi di $\mu^2[\beta]$. Osservazioni analoghe valgono per le operazioni susseguenti.

Avvertasi che quando la 2.^{a} divisione per lo stesso divisore può effettuarsi senza modificare il dividendo con un nuovo fattore, il fattore prec. resta lineare. Se per es.° il 1.° termine di r_1 può dividersi pel 1.° di r si ha μ in vece di $\mu . \mu_1$ e di μ^2. Si prescinde da qualunque moltiplicatore ausiliare di $[\alpha]$ perchè il coefficiente del 1.° termine di $[\alpha]=0$ e $[\beta]=0$ può sempre ridursi all'unità. Passiamo a mostrare con gli esempi che il sistema

$$\left\{ r_{n-1} = 0 \, , \; \frac{r_n}{\mu\mu_1 \ldots \mu_{n-1}} = 0 \right\} \ldots [P]$$

soddisfa con la massima semplicità e speditezza all' eliminazione fra due eq.[i] in x, y, e che la 2.[a] del predetto sistema è preferibile all' eq. finale risultante dal metodo *Bezoutiano*.

Sieno [531 sul fine] l' eq.[i]

$$y^3 - ay + x^3 - ax = 0 \ldots [\alpha], 3xy^2 + 3x^2y - b = 0 \ldots [\beta];$$

Fatta la moltiplicazione di $[\alpha]$ per $3x$ si trova

$$r = -3x^2y^2 - [3ax - b]y + 3x^4 - 3ax^2 :$$

$\frac{r}{[\beta]}$ dà $r_1 = [3x^3 - 3ax + b]y + 3x^4 - 3ax^2 - bx$:

e $[3x^3 - 3ax + b]\frac{[\beta]}{r_1}$ somministra

$$r_2 = 6bx^2y - b(3x^3 - 3ax + b).$$

Dividasi $[3x^3 - 3ax + b]r_1$ per r_2 onde avere
$r_3 = 27x^6 - 36ax^4 + 9a^2x^2 - 6abx + b^2 = 0$ eq. del §. cit.

e si otterrà $\frac{r_3}{\mu}$ ossia $\frac{r_3}{3x^3 - 3ax + b} = 9x^3 - 3ax + b = 0.$

Resta che ci assicuriamo se $3x^3 - 3ax + b$ sia un fattore estraneo, e tal verificazione ci servirà a riconoscere l' erroneità di una proposizione ammessa dagli Autori (*) *che l' eq. finale risultante dal metodo di Bezout abbia la*

(*) *Lacroix*: *Traité du Calc. Diff. et Int.* T. I. p. 324. *Cossali Mem.*[a] *sulla eliminaz.* Soc. Ital. T. XVI; ec.

prerogativa di essere scevra da ogni fattore estraneo.

Facciasi per comodo $a=1$, $b=3$, onde

$$y^3-y+x^3-x=0\,,\; xy^2+x^2y-1=0.$$

Si ha $\mu=3x^3-3x+3=0$, cioè $x^3-x+1=0$ ed in forza di questa la 1.ª eq. del probl. si riduce ad $y^3-y-1=0$. Affinchè il fattore x^3-x+1 non sia estraneo bisogna che i valori d'x, y, ricavati dall'eq.[i]

$$x^3-x+1=0\,,\; y^3-y-1=0\,,$$

soddisfacciano ad $xy^2+x^2y-1=0$.

Essi, prescindendo dagl'immginarj, sono

$$x=\sqrt[3]{-{}^1/_2+{}^1/_2\sqrt{\alpha}}+\sqrt[3]{-{}^1/_2-{}^1/_2\sqrt{\alpha}}$$

$$y=\sqrt[3]{{}^1/_2+{}^1/_2\sqrt{\alpha}}+\sqrt[3]{{}^1/_2-{}^1/_2\sqrt{\alpha}}=-x \text{ (*)}$$

dove $\alpha=\frac{23}{27}$, e la sostituzione di $-x$ per y in $xy^2+x^2y=1$ dà $x^3-x^3=1$; dunque il fattore sopra indicato è assolutamente estraneo al probl. e però ec.

L'eq.[i] da risolversi essendo

$$y^3+[1+x]y^2-[x+x^2]y-1=0\,.....[\alpha]$$

$$y^3+xy-x^3+x^2-2=0\,,\,......\,[\beta]$$

la solita operazione dà $\mu=1+x$, $\mu_1=-1+x$,

$$r=(1+x)y^2-(2x+x^2)y+x^3-x^2+1\,,$$

$$r_1=(2x+x^2)y^2+(x+2x^2-x^3-1]y-x^4+x^2-2x-2\,,$$

(*) Basta combinare (§. 448 Nota) l'eq. $y+z=q$ con $(y+z)^2-4yz=q^2-{}^4/_{27}p^3$, ossia $y-z=\sqrt{(q^2-{}^4/_{27}p^3)}$.

$r_2=[5x^3+7x^2-1]y-2x^5-2x^4+3x^3-2x^2-6x-2$;

l' eq. finale $r_3=0$ è

$$4x^{11}+2x^{10}-19x^9-14x^8+31x^7+11x^6-77x^5-71x^4$$
$$+29x^3+67x^2+32x+5=0,$$

e dividendola per $[1+x]^2[=\mu\mu_1]$ si ottiene

$$4x^9-6x^8-11x^7+14x^6+14x^5-31x^4-29x^3-18x^2+$$
$$22x+5=0,$$

una cui risolvente $x=-1$ sostituita in $r_2=0$ dà $y=1$. Difatto il sistema $x=-1$, $y=1$ verifica le proposte (α), (β).

Se il probl. dipende da tre eq.[i] in x, y, z, si elimina sino al 1.° grado un'incognita fra due, per es.° x^2, x^3 ec. fra le due prime, ed ottiensi

$M_1x+N_1=0\ldots(\delta)$ e fra (β), (δ) si deduce $\varphi(y,z)=0\ldots(\varepsilon)$

Il valore d'x tratto da (δ) si sostituisce in (γ) onde avere una 2.ª eq. $\psi(y,z)=0\ldots(\zeta)$: tra (ε), (ζ) si elimina una delle y, z, la 1.ª per es.° e si ha

$$M_2y+N_2=0,\ F(z)=0,$$

dove M_2, N_2 sono funzioni di z. Sia $F_1(z)=0$ la $F(z)=0$ liberata da'fattori estranei, e la soluzione del probl. non dipenderà che dall' eq.[i]

$$F_1(z)=0,\ M_1x+N_1=0,\ M_2y+N_2=0.$$

$$\text{Sieno}\ \begin{cases} x^2+2yx+y^2-2yz+z^2-3=0\ldots(\alpha) \\ x^2-yx+y^2-yz-z^2+1=0\ldots(\beta) \\ x^2-zx+2y^2-yz-4z^2+z+2=0\ldots(\gamma) \end{cases}$$

$$3yx-zy+2z^2-4=0\ldots(\delta)$$

e però $M_1=3y$, $N_1=-zy+2z^2-4$;
e sostituendo l' espressione d' x in (β),

$$9y^4-12zy^3-(2z^2+3)y^2+(8z-4z^3)y+4z^2(z^2-4)+16=0\ldots(\varepsilon)$$

Si elimini x fra (γ) e (δ) onde

$$18y^4-9zy^3+(9z-38z^2+18)y^2+$$
$$(2z^3-4z)y+4z^2(z^2-4)+16=0\ldots(\zeta)$$

e poichè si è dovuto moltiplicare (γ) per $9y^2(=\mu^2)$, i fattori estranei restano compresi nel sistema $[y^2=0$, e $(\delta)]$ che dà $(z^2-2)^4=0$. Eliminata la y fra (δ), (ε), e soppressi i nuovi fattori estranei, si trova l'eq. finale $F(z)=0$ sotto la forma

$$514z^{16}-1190z^{15}-6134z^{14}+12790z^{13}+32057z^{12}-57930z^{11}-$$
$$96187z^{10}+143320z^9+181680z^8-209360z^7-221128z^6+$$
$$180960z^5+168688z^4-85920z^3-73264z^2+17280z+13824$$

$=0$; eq. che divisa per $(z^2-2)^4$ si riduce a

$$514z^8-1190z^7-2022z^6+3270z^5+3545z^4-3210z^3-2851z^2+1080z+864=0.$$

I respettivi valori di M_2, N_2 sono

$-1208z^{11}+2472z^{10}+7287z^{9}-9606z^{8}-16483z^{7}+11700z^{6}+16362z^{5}-4752z^{4}-5760z^{3}$;

$$820z^{12}-1950z^{11}-6326z^{10}+11346z^{9}+19538z^{8}-23712z^{7}-30208z^{6}+21096z^{5}+23208z^{4}-6912(z^{3}-z^{2})\ (*)$$

* §. 538 In ogni termine della formola (L) i coefficienti ω, ω_1 etc. formano insieme la dimensione m: in ogni termine della (M) p, p_1 etc. insieme formano la dimensione n: ma (L)=(M) identicamente; dunque ogni termine dell' eq. finale insieme comprende ω, ω_1 ec. alla dimensione m, e p, p_1 etc. alla dimensione n, e si può stabilire: (**)

Teor. *Che ogni termine dell' eq. finale, proveniente dalle* IV, V, (534) *è della dimensione* m+n *per rapporto a* p, p$_1$ *ec.* ω, ω_1, *ec.* n *essendo la dimensione de' primi*, m *quella de' secondi.*

Abbiansi per es.° l'eq.ⁱ

$$py^{3}+p_1y^{2}+p_2y+p_3=0,\ \omega y^{2}+\omega_1 y+\omega_2=0.$$

La formola (M) è nel caso presente

$$(p\alpha_1^{3}+p_1\alpha_1^{2}+p_2\alpha_1+p_3)(p\alpha_2^{3}+p_1\alpha_2^{2}+p_2\alpha_2+p_3)=0$$

e si riduce a

$$p^{2}\alpha_1^{3}\alpha_2^{3}+pp_1(\alpha_1^{2}\alpha_2^{3}+\alpha_1^{3}\alpha_2^{2})+pp_2(\alpha_1\alpha_2^{3}+\alpha_1^{3}\alpha_2)+pp_3(\alpha_1^{3}+\alpha_2^{3})+$$
$$p_1^{2}\alpha_1^{2}\alpha_2^{2}+p_1p_2(\alpha_1\alpha_2^{2}+\alpha_1^{2}\alpha_2)+p_1p_3(\alpha_1^{2}+\alpha_2^{2})+p_2^{2}\alpha_1\alpha_2+p_2p_3(\alpha_1+\alpha_2)$$
$$+p_3^{2}=0.$$

(*) Può vedersi nel Giorn. della Sc. Politec. un' ingegnosa Mem.ª del Geometra *Bret*, Prof. di Matem.ᶜᵃ in Grenoble.

(**) Si suppone il 1.° termine dell' eq. IV. (534) affetto da p, il 1.° dell' eq. V. da ω.

D'altronde (496 e 499)

$$\alpha_1\alpha_2=\frac{\omega_2}{\omega},\ \alpha_1+\alpha_2=-\frac{\omega_1}{\omega},\ \alpha_1^2+\alpha_2^2=\frac{\omega_1^2-2\omega\omega_2}{\omega^2},$$

$$\alpha_1^3+\alpha_2^3=\frac{3\omega\omega_1\omega_2-\omega_1^3}{\omega^3},\ \alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_2=-\frac{\omega_1\omega_2}{\omega^2},$$

$$\alpha_1\alpha_2^3+\alpha_1^3\alpha_2=\frac{\omega_1^2\omega_2-2\omega\omega_2^2}{\omega^3},\ \alpha_1^2\alpha_2^3+\alpha_1^3\alpha_2^2=-\frac{\omega_1\omega_2^2}{\omega^3}:$$

Dunque l'eq. finale è

$$p^2\omega_2^3-pp_1\omega_1\omega_2^2+pp_2\omega_1^2\omega_2-2pp_2\omega\omega_2^2+3pp_3\omega\omega_1\omega_2-pp_3\omega_1^3+$$
$$p_1^2\omega\omega_2^2-p_1p_2\omega\omega_1\omega_2+p_1p_3\omega\omega_1^2-2p_1p_3\omega^2\omega_2+p_2^2\omega^2\omega_2-$$
$$p_2p_3\omega^2\omega_1+p_3^2\omega^3=0.$$

Teor. Posto che la massima potenza d' x compresa in un coefficiente qualunque p_m, dell' eq. IV (§. 534) sia x_m, e che sia x_n in un coefficiente qualunque ω_n dell'eq. V, il più alto grado dell' eq. definitiva, risultante dall' eliminazione d' γ fra l' eq. IV, V, è $=mn$. Dim.ne Per fare l' ipot. la più svantaggiosa si suppongano p_1, p_2 etc., ω_1, ω_2 etc. della respettiva forma

$$\alpha+\beta x,\ \gamma+\delta x+\varepsilon x^2,\ \text{etc.};\ \alpha'+\beta' x,\ \gamma'+\delta' x+\varepsilon' x^2,\ \text{ec.}$$

L' espressione di s_n risulta del grado n in x; quella di $s_{n,p}$ (500) del grado $n+p$; quella di $s_{n,p,q}$ del grando $n+p+q$, ec.

Il prodotto degli n fattori della formola (M) è composto di due classi di prodotti parziali, la 1.a delle quali comprende i termini

$$\left.\begin{array}{l}(a_1 a_2 \ldots a_n)^m (= \omega_n^m),\, p_1^n (a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-1} (= p_1^n \omega^{m-1}) \\ p_2^n (a_1 a_2 \ldots a_n)^{m-2} (= p_2^n \omega_n^{m-2}),\, \ldots\ldots + p_m^n \end{array}\right\} \ldots (Q)$$

la 2.ª i termini la cui formola è

$$p_{r'} p_{r''} p_{r'''} \ldots p_{r^{(n)}} a_1^{m-r'} . a_2^{m-r''} . a_3^{m-r'''} \ldots a_n^{m-r^{(n)}} \ldots\ldots (R)$$

Ma la massima potenza d'x in (Q) è $= mn$; in (R)

$$= [(r') + (r'') + (r''') \ldots + (r^{(n)})] + [m - (r') + m - (r'') + m - (r''') \ldots + m - (r^{(n)})]$$

$= mn$. Dunque

Teor. *Se p_m contiene x^m e non $x^{m+ec.}$, se ω_n contiene x^n e non $x^{n+ec.}$, il più alto grado dell' eq. finale, proveniente dall' eq.*[i] IV, V, $è = mn$.

§. 539 Tre sono le principali applicazioni importantissime della teorica spettante alla eliminazione. La prima ha per oggetto di liberare dalla irrazionalità una data eq., del che si diede un es.º sul principio del presente Capit., dove l' eq. finale altro non è che una razionale trasformata della $y = \sqrt[3]{a} - \sqrt{x}$.

Sia $\qquad \sqrt{x} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt{x^3} + a.$

Facendo $\sqrt{x} = t$, $\sqrt[3]{y^2} = u$, $\sqrt{x^3} = v$, la proposta diviene $t + u = v + a$, e si tratta di eliminare t, u, v, fra le quattro eq.[i]

$$x = t^2,\ y^2 = u^3,\ x^3 = v^2,\ t + u = v + a.$$

Dalla 4.ª $t^2 = (v + a - u)^2$: ma $t^2 = x$, $v^2 = x^3$:

dunque $x = x^3 - 2uv + 2av - 2au + a^2 + u^2$:

quindi $v = \dfrac{x - x^3 + 2au - a^2 - u^2}{2(a-u)}$,

ed $x^3 \left(= v^2\right) = \left(\dfrac{x - x^3 + 2au - a^2 - u^2}{2(a-u)}\right)^2$.

Pongasi $x - x^3 - a^2 = \mu$, e perchè $u^3 = y^2$ si avrà

$$x^3 = \frac{\mu^2 - 4a\mu u + 4a^2u^2 - 2\mu u^2 + 4ay^2 + uy^2}{4(a^2 - 2au + u^2)} \ldots (1)$$

d'onde $u^2 = \dfrac{\mu^2 - 4a\mu + 4ay^2 + uy^2 - 4ax^3 + 8aux^3}{2(2x^3 - 2a^2 + \mu)} \ldots (2)$

Non resta che moltiplicare per u, e sostituire y^2 in vece di u^3 per ottenere

$$u^2 = \frac{4(x^3 - a^2 + \tfrac{1}{2}\mu - au)y^2 + (4a^2x^3 - \mu^2)u}{y^2 - 4a\mu - 8ax^3}.$$

espressione che paragonata con quella dell'eq. (2) somministra

$$\frac{4(x^3 - a^2 + \tfrac{1}{2}\mu - au)y^2 + (4a^2x^3 - \mu^2)u}{y^2 - 4a\mu - 8ax^3}$$

$$= \frac{\mu - 4a\mu u + 4(a+u)y^2 + 4(2au - a^2)x^3}{4x^3 - 4a^2 + 2\mu}$$

cioè un'eq. che dà u in x ed y. Trovata l'espressione di u si ha quella di u^2 dall'eq. nell'eq. (1), (2) e sostituita l'una e l'altra nell'eq. (1) ne proviene la richiesta eq. razionale in x, y.

§. 540 La eliminazione serve a togliere due o tre termini da un'eq. affetta da un'incognita, purchè il suo grado non superi il 4.°

Avendosi $x^3+px+q=0$,

si ponga $x^2=\alpha x+\beta+\gamma \ldots (1)$; e si deduca

$$x^3=\alpha^2 x+(\alpha+x)(\beta+\gamma).$$

Così la proposta diviene

$$(\alpha^2+p+\beta+\gamma)x+\alpha(\beta+\gamma)+q=0:$$

e dà $x=\dfrac{-\alpha(\beta+\gamma)-q}{\alpha^2+p+\beta+\gamma}$:

sostituendo in (1) ottiensi

$$(\gamma+\beta)^3+2p(\gamma+\beta)^2+[(\alpha p-3q)\alpha+p^2](\gamma+\beta)+q(\alpha^3+\alpha p+q)=0.$$

che diremo $y^3+Ay^2+By+C=0$, dove

$$A=3\beta+2p,\ B=3\beta^2+(4\beta+\alpha^2)p-3\alpha q+p^2,$$

$$C=\beta^3+2p\beta^2+p^2\beta+p\alpha^2\beta-(3\alpha\beta+\alpha^3+p\alpha+q)q.$$

Per fare sparire il 2.° ed il 3.° termine si ponga $3\beta+2p=0$, cioè $\beta=-\frac{2}{3}p$, e sostituito questo valore in $B=0$ se ne ricavi il valore di α. L'eq. a cui si riduce $B=0$ è

$$p\alpha^2-3q\alpha-{}^1/_3\,p^2=0.$$

Trovato α e β si ha y dalla $y^3+C=0$,

e poi $x=-\dfrac{\alpha(\beta+\gamma)+q}{\alpha^2+p+\beta+\gamma}$.

Con lo stesso metodo si tolgono due ed anche tre termini da un' eq. di 4° grado.

Per rapporto ad $x^4+px^2+qx+r=0$

si fa $x^2=\alpha x^2+\beta x+\gamma+y$, si ha la trasformata

$$y^4+Ay^3+By^2+Cy+D=0;$$

α, β, γ, si determinano per mezzo dell' eq.^i $A=0$, $B=0$, $C=0$, e si trova che una delle α, β, γ, dipende da un' eq. di 6.° grado, la quale per altro, come *Lagrange* ha dimostrato, può ridursi al 3.° Noi crediamo preferibile la eliminazione de' termini 2.° e 4.° per mezzo dell' eq.^i $A=0$, $C=0$, nella 1.^a delle quali α, β, γ, sono al 1.° grado, al 3.° nella 2.^a

Il met. prec. deesi a *Tschirnaus* (Atti di Lipsia an 1683 *p.* 204) e non è di alcun uso per l' eq.^i di un grado superiore al 4.°, poichè una delle indeterminate si trova dipendente da un' eq. più elevata dalla proposta.

§. 541 Quando si ha un rapporto fra le risolventi di un' eq. la eliminazione serve a deprimerla.

Sia $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)=0$ il rapporto assegnato. Siccome questa eq. dee coesistere con

$$\alpha_1^m+p_1\alpha_1^{m-1}\text{ec.}=0\ ,\ \alpha_2^m+p_1\alpha_2^{m-1}\text{ec.}=0\ldots\alpha_m^m+p_1\alpha_m^{m-1}\text{ec.}=0$$

se si eliminano fra due sistemi di m eq.^i computandoci la $F=0$, tutte le α_1, α_2 ec. a riserva di una stessa risolvente α_{m-n}: le risultanti, che sono della forma $\alpha_{m-n}^q+r_1\alpha_{m-n}^{q-1}\text{ec.}=0$ e coesistenti, debbono avere un divisore co-

mune, che fatto $=0$ determina α_{m-n}; determina anche un'altra risòlvente ed è per conseguenza di 2.° grado, se due di esse modificano in egual maniera la $F=0$, e così in seg. Due altri sistemi di k eq.^{i}, scelte come sopra, conducono ad un risultamento analogo. Divisa la proposta per ciascuno de' divisori si hanno altrettante eq.^{i} depresse; l'eq.^{i} costituite da' divisori danno le risolventi.

La $F=0$ sia per es.° $k\alpha_1+k'\alpha_2=h$ e la proposta $x^3+p_1x^2+p_2x+p_3=0$.

Siccome il rapporto dato è affetto da due risolventi s'istituiscano l'eq.^{i}

$$(1)\ [\alpha_1^3+p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_1+p_3=0\,,\ \alpha_2^3+p_1\alpha_2^2+p_2\alpha_2+p_3=0]\,.$$

Si elimini α_2 dalla 2.^{a} con sostituirvi $\frac{h-k\alpha_1}{k'}$, e si cerchi il fattore comune alla risultante

$$k^3\alpha_1^3-(3h+k'p_1)k^2\alpha_1^2+(3h^2+2hk'p_1+k'^2p_2)m\alpha_1-$$
$$(h^3+k'p_1h^2+k'^2p_2h+k'^3p_3)=0$$

ed alla 1.^{a} dell'eq.^{i} (1). Questi darà α_1. La eliminazione di α_1 avrebbe dato α_2.

Se $k=k'$ l'eq. finale, proveniente dall'elinazione di α_1 o di α_2, è la stessa, ed il fattor comune sollevasi al 2.° grado. Infatti nell'ipot. anzidetta non evvi ragione per cui il fattor comune dia una risolvente piuttosto che l'altra.

§. 542 Prima di accingersi alla eliminazione fa d'uopo esaminare l'assoluto ed il relativo significato dell'eq.^{i}, perchè se una sia

superflua il probl. è indeterminato, se contraddittoria impossibile. Così pel seg.

Probl. Trovare due n.[i] tali, che il triplo del 1.° più il quadruplo del 2.° faccia 6, ed il 1.° più $\frac{12}{9}$ del 2.° sia $=2$, si ha

$$3x+4y=6,\ 9x+12y=18,$$

e queste producono l'identità $18-12y=18-12y$. La ragione si è che la 2.ª equivale al triplo della 1.ª

Se trattisi di un probl. espresso col sistema

$$(ax+by)(mx+ny)+cd=c(mx+ny)+d(ax+by)$$
$$(a'x+b'y)(mx+ny)+c'd=c'(mx+ny)+d(a'x+b'y),$$

eliminando si giunge ad un' eq. identica, e ciò perchè le proposte sono affette dal fattor comune $mx+ny-d$. Il probl. per altro non è indeterminato, e soppresso il predetto fattore l' identità finale sparisce.

Si ha l' es.° di un probl. impossibile nel sistema contradittorio

$$4x+6y=14,\ 10x+15y=22,$$

che facilmente si ravvisa equivalente a

$$10x=35-15y,\ 10x=22-15y.$$

Un probl. è inetto quando una parziale condizione immediatamente lo risolve: tal è il noto probl., male a proposito ricavato dalla greca iscrizione scolpita sul sepolcro di *Diofanto*, e riportata nell' Antologia, iscrizione che crediamo assai ben tradotta ne'seg. termini.

„ Iddio concesse a Diofanto di entrare nell'
„ adolescenza (*) alla sesta parte della sua
„ vita; diede alle sue guance il fior giovanile
„ aggiungendovi la duodecima: accesa, sette
„ anni dopo, la face nuziale, gli concesse,
„ allo spirare del 5.° anno, un figlio, che fu
„ dalla morte rapito mentre compiva la metà
„ degli anni patèrni: il padre, dedito sempre
„ alle Matematiche, con cui mitigava il do-
„ lore di tal perdita, gli sopravvisse quattro
„ anni.

Non potendosi supporre che l'autore abbia preteso di attribuire alla fanciullezza di *Diofanto* un periodo discrepante dalla comune opinione, convien dire che anche in que' tempi l'adolescenza cominciasse, come presso gli antichi Greci, col quattordicesim'anno, ed in tal caso il sestuplo di 14 dà subito 84 anni. Dunque l'addotto epigramma può riguardarsi come una capricciosa indicazione delle parti che costituirono l'età del geometra Alessandrino, non mai come un probl., giacchè non presenta alcuna verità recondita da rintracciarsi, nè, secondo la greca definizione, nulla propone da farsi e da costruirsi: *Problema est propositio in qua aliquid proponitur faciendum et construendum* (*Pappo*: *Collect. Math. Lib.* III) (*)

(*) Εκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην

(**) *L'epigramma, com' ella ben riflette*, (così il Chiarisssimo Sig. *Cesare Lucchesini*, in una sua ornatissima lettera a noi diretta) *non presenta più un problema, giacché entrandosi nell' adolescenza ai* 14 *anni, subito si vede che Diofanto visse anni* 84.

GIUNTE E MODIFICAZIONI

da unirsi a quelle che trovansi sul fine del 2.° tomo per formare un più comodo e definitivo supplemento al primo.

Si riformi la pag. 20 dopo la parola *somma* della lin. 14, nella maniera che segue: e la somma, in cui debbonsi separare con la virgola verso la destra tante cifre quante sono quelle del moltiplicando più una, sopprimendo le ultime due, ed aumentando di 1 l'ultima delle rimanenti se la 1.ª a sinistra delle cifre soppresse sia >6 (*), darà il prodotto richiesto. Ecco tutta l'operazione onde ottenere compendiosamente il prodotto 0,424623×0,225344 con quattro decimali esatte

```
0,42462
   3522
-------
  84924
   8492
   2120
    126
-------
0,0956|62
```

(*) Gli autori dicono *se la 1.ª delle cifre soppresse sia* 9 ma questa regola è fallace, e tale si scuopre anche nel prodotto di 0,334646 per 0,444363, ove si vogliano esatte quattro decimali, poichè il prodotto compendioso è 0,1486|75, il vero 0,1487|04300498 Nè debbonsi riguardare com'eccezioni que'casi in cui l'ultima delle cifre richieste si trova esatta, quantunque gliene succeda una >6, come nell'approssimato prodotto di 0,0538534 per se medesimo, che è 0,0029001|78, poichè l'aumento sopra indicato porge un valòre più vicino al vero, e lo scopo di qualunque operazione aritmetica si è quello di avere col minimo dispendio di fatica e di tempo il massimo rigore possibile nel risultamento finale.

Ciascun prodotto parziale esprime millionesime, cioè un n.° decimale le cui unità occupano il 2.° ordine, dopo quello dell' infima decimale esatta che vuolsi nel prodotto totale, e questa osservazione, siccome può applicarsi ad ogni caso particolare, costituisce la ragione della regola (Seguono le ultime cinque linee)

P. 74—13 . . . è pari . . . . . è uguale

77—3 . . . . . =1 . . . . =1 ed =0

—4 . . . . . x=246 . . . . . . x=246 ed =36, y=23, =4.

P. 93—6 . . . e l'equivalenza del 1.° membro al 2.°, cioè a 2^m-1, si verifica facendo m=2.3 ec. Si proverà con un metodo rigoroso nel §. 65.

94—lin. ult. Probl. Posto che in una serie di m elementi $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_m$ si varj l'ordine con una data legge ch'estendasi a tutti, si cerca il n.° delle variazioni ed un facil metodo per ottenerle.

Sia per maggior chiarezza

Serie primit.	a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ;
1.ª serie variata	a_3 , a_4 , a_2 , a_5 , a_1
2.ª serie variata	a_2 , a_5 , a_4 , a_1 , a_3
3.ª serie variata	a_4 , a_1 , a_5 , a_3 , a_2
4.ª serie variata	a_5 , a_3 , a_1 , a_2 , a_4
serie primit.	a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5

Scritta la 2.ª linea che costituisce la legge, si passa alla 3.ª come dalla 1.ª alla 2.ª, collo-

cando a_s sotto a_s, giacchè l' a_s della 2.ª linea sta sotto l' a_s della 1.ª; così scrivesi a_s sotto a_4 poichè l'a_s della 2.ª linea trovasi sotto l'a_4 della 1.ª e così ec.

Se gli elementi sieno m, ognuno varia m volte di sito, e siccome ciascuno di questi è diverso dagli altri, il n.º delle variazioni eguaglia quello degli elementi.

Si avrà occasione di vedere a suo luogo che la teorica del presente articolo ha un essenziale rapporto con la generale soluzione dell' equazioni, argomento discusso con singolare profondità dal Chiarissimo Sig. Cav. *Ruffini* in un opuscolo che ha per titolo — *Riflessioni intorno alla soluzione dell' eq.ⁱ alg. gen.ˡⁱ* (Modena 1813).

Essendo $l+l'+l''$ ec.$=m$, se l elementi soggiacciono ad una legge L, l ad una legge L', ec. la variazione dicesi composta; ciascuna delle leggi L, L', L'', ec. dà respettivamente l, l', l'' ec. variazioni, ed il total n.º di esse è $= l\,l'\,l''$ ec. n.º dove si debbono però sopprimere tutti i fattori semplici di l, l', l'' ec. che si trovano ripetuti ne' successivi n.ⁱ l, l', l'' ec. e deesi tener conto della sola massima potenza di uno stesso fattore semplice. Così se $l=2$, $l'=3$, $l''=12$, il n.º cercato è $=2^2.3$. Il prospetto dell' operazione diviene però sempre più complicato a misura che ci allontaniamo dal caso di una legge *semplice*, e per soddisfare ai quesiti che la natura dell' indagine suggerisce, è necessaria la traccia di parecchi principj, che i curiosi potranno rinvenire in un' amplissima dissertazione del Sig. Conte *Paradisi* (Soc. Ital. T. XVIII) Profitteremo nel tomo 4.º dell' analoga Mem.ª di *Couchy*.

101—4 di fon. (Aggiunga)

Le ipotesi per cui lo sviluppamento di $(1+z)^{\frac{m}{m_,}}$ riducesi al caso dell'esponente intiero sono $m_,=1$, $m=\mu m_,$: ma la formola (2) della pag. 99 quantunque induttiva, adequatamente esclude qualsivoglia potenza fratta; dunque se l'espressione di $(1+z)^{\frac{m}{m_,}}$ può contenere un termine $a_p z^{\frac{r}{s}}$, il coefficiente a_p dev' esser tale, che svanisca quando $m_,=1$ e quando $m=\mu m_,$, per conseguenza della forma $(1-m_,)(m-\mu m_,)F(m,m_,)$, dove F indica una funzione di m ed $m_,$. Or questo è assurdo, perchè l indeterminata μ produce un indefinito n.° di termini diversi, ed indipendenti dal particolare valore che si suppone assegnato ad m ed $m_,$, e perciò estranei alla potenza proposta: dunque il termine $a_p z^{\frac{r}{s}}$ non esiste.

102—6. Ciò posto si faccia (*dicasi*)

Ciò posto s' istituiscano l' eq.[i] ipotetiche

$$(1+z)^{\frac{m}{m_,}}=\varphi^m,\ (1+y)^{\frac{m}{m_,}}=\psi^m,$$

che il risultamento finale dimostrerà ammissibili, qualora porga immune da incongruenza una completa determinazione di φ^m e ψ^m; e siccome le addotte eq.[i] debbono verificarsi per qualunque valore di m, si può supporre $m=m_,$, il che dà

$$1+z=\varphi^{m_,},\ 1+y=\psi^{m_,}.\ (*)$$

P. 105—15 ... si distingue... mal si distingue

(*) Ci asteniamo dal supporre $(1+z)^{\frac{1}{m_,}}=\varphi$ per dedurne $(1+z)^{\frac{m}{m_,}}=\varphi^m$, poichè questa conseguenza dipende dal teor. $a^{\frac{n}{m_,}}.a^{\frac{n_,}{m_,}}=a^{\frac{n+n_,}{m_,}}$, che abbisogna di rigorosa dim.[ne]

Con l'aggiunto di *male* a *si distingue*, omesso nell'affrettata stampa del carticino (105—106) si allude alla soverchia lode, che *Lacroix* e *Francoeur*, ad onta del contrario *sospetto* di *Lagrange* (*Leçons sur le Calc. des Fonct. p.* 17) profusero alla dimostrazione *Euleriana.* Nemici d'ogni dissidio letterario, ci eravamo astenuti dal pronunciar giudizio contro i citati professori francesi, ma il rimprovero ch'è stato fatto all'ambiguo contegno da noi tenuto, ci ha costretti a dichiarare apertamente l'animo nostro. Diciamo pertanto; 1.° che $\frac{h}{k}$ è un rotto sostituito e non supposto eguale ad m, n, p ec. 2.° che la dimostrazione controversa, purchè riducasi, com'è stato praticato da *Francoeur* e da noi, alla più semplice forma di cui è capace, non è nè falsa nè rigorosa: non falsa, perchè consiste in una legittima combinazione di due principj veri e generalmente ammessi, cioè che $(1+x)^{\frac{h}{k}}$ sia una funzione dell'esponente, e che, per qualunque valore di a, m, n, abbiasi $a^m . a^n = a^{m+n}$, principio assunto anche da *Lagrange* (Op. cit. p. 14) come *base di tutta la teoria delle potenze*: non rigorosa perchè il 2.° degli anzidetti principi, più presentito che provato, è un primo elemento del calcolo, forse inaccessibile ad un' argomentazione diretta, e per quanto a noi sembra, essenzialmente congiunto con la formola del binomio.

P. 107. innan. al §. 66. Stabilita la forma di t (p. 98 lin. 7) adequatamente dimostrasi il teor. della pag. 99.

Chiamando $n_{,}$ un intiero dato si ha il coefficiente del termine $n_{,}$esimo dopo il 1.°

$$=\frac{m(m-1)\ldots[m-(n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots n_{,}}\ldots(1)$$

quello dell' $n_{,}$.esimo innanzi all' ultimo

$$=\frac{m(m-1)\ldots[m-(m-n_{,}-1)]}{1.2.3\ldots(m-n_{,})}\ldots(2);$$

ma (1)=(2) (vegga p. 91): dunque ec.

Resta così assicurata l'identità fra il 2.° membro ed il 1.° nell'eq. sul fine del §. 60.

P. 108...§. 68. Verificata con l'esposta dimostrazione la legittimità dell'eq.^{i} ipotetiche

$$(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}=\varphi^{m},\ (1+y)^{\frac{m}{m_{,}}}=\psi^{m},$$

rimane assicurato il teor. $a^{\frac{n}{m_{,}}}.a^{\frac{n_{,}}{m_{,}}}=a^{\frac{n+n_{,}}{m_{,}}}$. Infatti la formola $(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}$ necessariamente equivale al prodotto di m fattori identici ad $(1+z)^{\frac{1}{m_{,}}}$, perchè nell'ipot. di $m=1$ è $(1+z)^{\frac{1}{m_{,}}}=\varphi$; $\varphi^{m}=\varphi.\varphi.\varphi\ldots$ (m vol), il n.° m può spartirsi in due intieri $m-n$, n, ed il prodotto di m fattori della forma $(1+z)^{\frac{1}{m_{,}}}$ non può essere $=(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}$ senza che sia $=(1+z)^{\frac{n}{m_{,}}}$ il prodotto di un minor n.° n degli stessi fattori: quindi $(1+z)^{\frac{m}{m_{,}}}=(1+z)^{\frac{m-n}{m_{,}}}(1+z)^{\frac{n}{m_{,}}}$, e facendo $m-n=n_{,}$ si ha

$$(1+z)^{\frac{n'}{n}}(1+z)^{\frac{n}{m'}}[=(1+z)^{\frac{m}{m'}}]=(1+z)^{\frac{m+n'}{m'}}$$

come ec.

125—3 di fondo. Si sopprimano le ult. tre linee e loro sostituiscasi ciò che segue:

Supponendo $\sqrt[4]{-1}=A+B\sqrt{-1}$ si ottiene

$\sqrt{-1}=A^2-B^2+2AB\sqrt{-1}$ cioè $A=B=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

e però $\sqrt[4]{-1}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})$;

formola che si ritroverà come caso particolare (p. 164 sul fine) facendo $b=0$ ed $a=-1$. Dunque

$$\sqrt[4n]{-1}(=\sqrt[n]{\sqrt[4]{-1}})=[\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{-1})]^{\frac{1}{n}};$$

e perchè i termini reali, come pure i coefficienti di $\sqrt{-1}$, formano una serie convergente, basta rappresentare per A, B la respettiva lor somma-limite onde avere $\sqrt[4n]{-1}=A\pm B\sqrt{-1}$.

Quindi risulta... (segue la pag. 126 ma si cancelli quadratiche)

P. 146 — Il calcolo si rende più semplice sopprimendo nella lin. 4.ª il coefficiente 3 come si praticò per rapporto al coefficiente 2 nella pag. 129. Così spariscono le cifre 3, 6 ne' sistemi (1), (2), (3), ed i radicali $\sqrt[7]{3}, \sqrt[5]{12}, \sqrt{18}$, nelle respettive linee 12.ª, 18.ª, 19.ª

147 — lin. 9... abbia un n.° di termini ne-

gativi >3 *dicasi* il n.° de'termini negativi non sia $=4$ ovv. $=6$.

194 — 2 .... positivo ..... positivo >1
—10 .... <1 .... <1 nè $=1$.

203 — 4 Per rischiarare questa verità si osservi che nell'eq. $\sqrt[n]{a^m}=y$ non può supporsi $a=\alpha^n$, altrimenti sarebbe $\sqrt[n]{\alpha^{nm}}=\alpha^{\frac{mn}{n}}=\alpha^m=y$, cioè y potenza intiera positiva di una base finita α, contro l'ipotesi: che $\sqrt[n]{a}$ essendo per conseguenza un n.° decimale indefinito, tale risulta $\sqrt[n]{a^m}$, com'equivalente ad $(a^{\frac{1}{n}})^m$, potenza intiera positiva di un n° decimale indefinito.

209 — ult. *Aggiungasi*.... In tale ipot. si ha log. $e=1$, e facendo $n-\frac{1}{2}n^2$ ec. $=1$ si scuopre che dev'essere $1+n=e$, vale a dire $n=1,71828\ 18284$...

Resta così dimostrata l'esistenza di un valore di n soddisfacente all'ipot.
$n-\frac{1}{2}n^2$ ec. $(=k)=1$.

256 — 1 .... Le ipot. $n=1$, $n=2$ .... Le ipot. $n=1$, $n=2$, $m=2$;
P. 278 — 13 .... diverge .... converge

P. 261. Completo prospetto de' n^i figurati

1 ,	1 ,	1 ,	1 ,	1 ,	1		1
1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6		n
1 ,	3 ,	6 ,	10 ,	15 ,	21		$\frac{n(n+1)}{1.2}$
1 ,	4 ,	10 ,	20 ,	35 ,	56		$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
1 ,	5 ,	15 ,	35 ,	70 ,	126		$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
1 ,	6 ,	21 ,	56 ,	126 ,	252	......	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
1 ,	n ,	$\frac{n(n+1)}{1.2}$,	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$,	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$,	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}$	.....	$\frac{n(n+1)\ldots(n+n-2)}{1.2.3\ldots(n-1)}$

Due colonne dello stess' ordine, una orizzontale, l' altra verticale, sono dunque identiche fra di loro.

GIUNTE, MODIFICAZIONI

e correzioni pel T. II

P. 88—8.... $c_5 = \frac{1}{2} c_3 - \frac{1}{2.3.5} = \frac{1}{2} . \frac{1}{3} - \frac{1}{2.3.5} = \frac{2}{15}$:

$$c_7 = \frac{1}{2} c_5 - \frac{1}{2.3.4} c_3 + \frac{1}{2.3.4.5.7} =$$

$$\frac{1}{2} . \frac{2}{15} - \frac{1}{2.3.4} . \frac{1}{3} + \frac{1}{2.3.4.5.7} =$$

$$\frac{2.4.7+1}{2.3.4.5.7} - \frac{1}{3} . \frac{5.7}{2.3.4.5.7} =$$

$$\frac{57}{2.3.4.5.7} - \frac{1}{3} . \frac{35}{2.3.4.5.7} =$$

$$\frac{171-35}{2.3.3.4.5.7} = \frac{17}{3.3.5.7} = \frac{17}{315} ;$$

$$c_9 = \frac{1}{2} c_7 - \frac{1}{2.3.4} c_5 + \frac{1}{2.3.4.5.6} c_3 - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.9} =$$

$$\frac{1}{2} . \frac{17}{315} - \frac{1}{3.4.15} + \frac{1}{2.3.3.4.5.6} - \frac{1}{2.3.4.5.6.7.9} = \text{ec.}$$

Fa d'uopo avvertire che l'ultimo termine (p. 88 lin. 1.ª) equivale alla somma di que' due che non sono affetti da coefficiente letterale, e siccome si è trovato $c_1 = 1$, il penult. termine del 2.º membro, nella serie che determina c_{2n+1}, è quello che trovasi affetto da c_3.

P. 92 sul fine: Raddoppi i n.[i] 100, 10000, 1000000.

114—5 ... —0,495005 .... —9,495005.

115 — 3.[a] di fon.

+ log. 183 ec. — log. 120 .....

+ (log. 183 ec. — log. 120) ½.

123 — penul.

$cos.b + cos.c \; cos.(b+c) \ldots$

$cos.b + cos.c - cos(b+c)$

157—15 Per costituire la posizione di una faccia, che si suppone collocata sul piano xy, sicchè un veritice cada in A, uno spigolo in Ax, si richiedono $2(m+3)-3$ ossia $2m+3$ coordinate: gli altri $n-m-3$ vertici esteriori ad xy n' esigono $3(n-m-3)$: dunque per determinare tutti i vertici e quindi il poliedro (*Legendre* Geom. Lib. VI. prop. I) bastano

$2m+3+3(n-m-3)$ ossia $3(n-2)-m$ elementi.

172—Nota ... lin. 6.[a] Ciò che non deesi dissimulare per rapporto al teor. (ψ) è, ch' esso molto giova ad abbreviare il calcolo quando i dati sono un cateto ed un angolo obbliquo, ovvero i cateti.

178—6 ... $= \frac{4}{5}\pi r^2 \ldots\ldots = \frac{4}{3}\pi r^2$

181—15 .... $\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b)} \ldots \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 - b^2)}$

— 3... $\alpha^2+\beta^2=\gamma$ .... $\alpha^2+\beta^2=\gamma^2$.

187—15.... Il 2.° Il 1.°

—16 del 1.° del 2.°

188— 6 di fon.... [302].... [312]

191— 4... $x=r\sqrt{3}$ .... $C=r\sqrt{3}$.

199—10. Infatti le rette $\delta_{,}$, $\delta_{,,}$ ec. divengono cateti di altrettanti trigoni ortogonali, ciascuno de' quali ha un cateto comune h.

Se il polo da cui partono le rette tirate ai vertici cade in $a_{,}$ si ha $\Delta=r$ e

$$\delta^2_{,,}+\delta^2_{,,,}....+\delta^2_{(m)}=2mr^2:$$

Sia $m=2n$, e siccome le diagonali di sito pari misurano la distanza di un vertice dell' n.agono regolare dagli altri, e la somma de' loro quadrati si è trovata $=2nr^2=mr^2$, forza è che anche la somma de' quadrati delle diagonali di sito dispari, innalzate al quadrato, risulti $=mr^2$: quindi in altra guisa, e molto più semplicemente, il teor. V.

Con egual prontezza e facilità ottiensi dalla Geom.ª elementare la dimostrazione del teor. IV, ma sì questa che parecchie altre indagini analoghe le riserbiamo ad un nuovo trattato che ci proponiamo di pubblicare sull'amenissima e feconda teoria de' poligoni rettilinei.

230 — §. 344 sul fine.

Coloro che inutilmente abbiano fatto prova delle loro forze per ottenere la generale

espressione di δ (§. cit.) veggano ciò che segue.

Condotta la MN parallela ad M'N' (F.ª 146) projezione in xy della MM″ ($=\delta$) che unisce i punti M, M″, dati nello spazio, si ha

$$MM'' = \sqrt{[\overline{MN}^2 + \overline{M''N}^2 + 2MN.M''N\cos.MNM'']}.$$

Sieno M'P, N'P', parallele ad Ay, M'Q parallela ad Ax, si sostituisca z-$z_{,}$ per M″N,

$$\overline{M'Q}^2 + \overline{N'Q}^2 - 2M'Q.N'Q\cos.M'\hat{Q}.N'Q\text{, ossia}$$

$(x-x_{,})^2+(y-y_{,})^2-2(x-x_{,})(y-y_{,})\cos.x\hat{.}y$ per $\overline{MN}^2$ ($=\overline{M'N'}^2$) ed avvertendo che

$$MN\cos.M\hat{N}M''(=-M'N'\cos.N'\hat{M}'M),$$

equivale alla projezione della N M′ sulla M′M, e che questa coincide con la projezione della spezzata M′QN′, cioè con

$$M'Q\cos.QM'M[=(x-x_{,})\cos.x\hat{.}z]+N'Q\cos.QN'N$$

$$[=M'O\cos.OM'M=(y-y_{,})\cos.y.z]\text{, si concluderà ec.}$$

Fine del Tomo Terzo.

Errori *Correzioni*

P. 7—2... il coefficiente $\delta^{\bullet}$... il coefficiente di $\delta^{\bullet}$

10—penul... Aβ .... A$\beta^{\bullet}$

11—12 .... $\alpha=$ .... $\alpha=-$

14—1.... di due curve... di curve

—12 .... Δ .... 2 Δ

43—6 .... F. 100 .... F. 96

— 7 ... eguali .... di eguale larghezza

47—11 .... $m=\frac{\gamma}{x_{,}-a}$ ... $m=\frac{\gamma_{,}}{x_{,}-a}$

50 Nota... (Sopprimasi *nella forma*)

120—14 ... può ..... ella può

121—penul... *Prisson* .... *Poisson*

126—2 ...... $-x_{,}sen,\theta$ .... $x_{,}sen.\theta$

127—7 .... $u\cos.\theta\ sen.\theta$ ... $u\cos.\theta'\,sen.\theta$

—8 .... $t\,sen.\theta'$ .... $t\,sen.\theta$

137—9 ... (Si ponga δ sul fine della linea, e si tolga Δ' sul principio della seguente)

165—9 di fon... (Tolga gli esponenti)

176—10 ..... AB$^{\bullet}$. ...... AB$'^{\bullet}$

178—10 .... §. 284.... §. 484

192—5... Pongansi le sgraffe { } e l'indice... I e si scriva $\lambda_{\bullet}$ per $\lambda_{,}$

198—16 ....$(x-\alpha_{\bullet})$ ... $(x-\alpha_{m})$

Errori *Correzioni*

P. 199—3 .... (Aggiunga) viceversa se fra o, ∞ inclusivamente, non esistono due n.[i] che sostituiti per x riducano l' aggregato de' termini ad un valore di segno diverso, la proposta non ammette alcuna risolvente reale positiva.

224—4 perciò d supera ... perciò, siccome il 1.° membro della Z_m, posto $n(<m)$ per m, equivale a ciò che D_n diventa quando vi si sostituisce $d+y$ per d, atteso il teor. del §. 493, d supera ec.

—13... $-(p^{n-m}+pr)$... ... $-(p_{m-n}+p_r)$

205—3 di fon. . . . p_{n-m}, s_1 . . . $p_{n-1} . s_1$

220—10 . . . . §. 490 . . . . §. 496.

Nel 1.° termine delle quattro linee susseg. si è supposto $p=1$.

224—4 ..... Infatti sostituendo $d+y$ (dove $y>0$) per d, la D_n diviene $D_n+D'_n y+ {}^1/_2 D''_n . y^2$ ec. $\}....\Delta_n$; da D_n non $<\frac{p_r}{d-1}$ deriva $D_n>\frac{p_r}{d+y-1}$,

molto più $\Delta_n>\frac{p_r}{d+y-1}$, perciò il polinomio D_m si conserva positivo dopo la sostituzione di $d+y$ per d, a dire che Z_m risulta >0 per tutti i valori d'y fra zero ed ∞.

—13 . . . . $-(p^{m-n}+p_r)$ . . . . $-(p_{m-n}+p_r)$

289—4 .... sette anni dopo .... dopo la 7.ª parte della sua vita

INDICE DELLE MATERIE.

NAPOLI

85
87
88
90
94

115
118
121
123

135
137
142
40